LES NOMBRES COMME UNE FERMETURE ECLAIR

Un, deux, trois... l'infini !

En arithmétique, la démonstration d'un théorème général, applicable à tous les nombres, requiert en principe une infinité de vérifications : montrer que le théorème est vrai pour 1, 2, 3 et ainsi de suite. Aussi loin que nous allions, nous ne parviendrons jamais à établir la vérité du théorème général. Seule la méthode dite de la récurrence permet de « passer du fini à l'infini ».

Par André Warusfel, inspecteur général de mathématiques.

A l'école primaire, au collège puis au lycée, l'élève est baigné de mathématiques en apparences finies, c'est-à-dire exprimables dans le cadre d'une théorie qui ne comporterait, à première vue, que des nombres et des combinaisons de nombres de taille « raisonnable », ainsi que des figures géométriques nécessairement bornées. Pourtant, dès ces premières expériences, le concept d'infini baigne ces objets si familiers ; il va de soi que les enseignants se gardent bien, et à juste titre, d'attirer l'attention sur cette présence.

Le plus visible de ces infinis est évidemment celui de la très banale droite euclidienne, d'essence nécessairement illimitée, même si tous les dessins qui la représentent doivent tenir sur des surfaces bornées (tableau noir ou feuille de papier). L'infini des nombres est présent mais masqué sous celui de la droite, puisque Descartes et Fermat avaient su si bien formaliser, par leur géométrie analytique, la vieille correspondance point/abscisse de la théorie des grandeurs déjà codifiée par Euclide. Pour les lycéens, il se traduit par la possibilité d'imaginer des nombres aussi grands que l'on veut (puisqu'il existe des points aussi éloignés que l'on veut), également réductibles au fini par des transformations inspirées de la géométrie projective. L'infiniment petit surtout, autrement plus subtil que le grand, apparaît pendant le cursus scolaire élémentaire, ne serait-ce que par le biais des singularités de fonctions élémentaires (dont évidemment les fonctions rationnelles) qui admettent des limites infiniment grandes comme l'application définie par 1/x au voisinage de 0, ou de l'infinité de décimales nécessaires pour écrire des nombres aussi simples que 1/7 ou le nombre π, cher à Archimède. La considération des « branches infinies » des fonctions élémentaires est très simple ; c'est la première fois que des lycéens sont conduits à rencontrer à la fois le mot et le symbole « ∞ ». Toutefois, cette prise de contact reste très sommaire et ne pose généralement pas de difficultés particulières ; « infini » signifie ici essentiellement « très grand » (à la rigueur « très petit ») et ce concept n'est pas l'objet de manipulations subtiles. L'emploi de suites infinies de chiffres de la numération décimale ne crée pas non plus trop de problèmes aux mathématiciens en herbe lorsqu'elles sont très régulières (ainsi le quotient de 1 par 7, qui ne peut s'écrire avec un nombre fini de signes, possède-t-il une périodicité remarquable, puisqu'il vaut 0,142 857 142 857 142 857... et obéit à une règle si rustique qu'elle ne peut manquer de sauter aux yeux).

> « *La récurrence contient, en une formule unique, une infinité de syllogismes.* »
>
> HENRI POINCARÉ

J.-L. CHARMET

Une racine carrée ne possède pas tant de simplicité. Mais même si le type des raisonnements nécessaires à une construction cohérente des nombres réels reste trop complexe pour qu'on puisse les exposer avant l'Université, les objets mis en jeu dans les approximations décimales des nombres restent simples, car reposant sur les seules séries géométriques. Il n'y a donc pas à s'étonner qu'un enseignement de type lycée puisse largement utiliser ces représentations sans demander autre chose qu'un acquiescement à des intuitions visuelles fortes.

Une autre intervention de l'infini des mathématiciens professionnels dans le domaine des nombres concerne les entiers. Mais cette fois-ci, son irruption, réservée aux seuls scientifiques en fin de cursus au lycée, n'est plus insignifiante et touche aux fondements même des mathématiques. Il s'agit de la récurrence, dont Henri Poincaré pensait, sans doute de manière excessive, qu'elle constituait la pierre angulaire de la science. Elle concerne toute proposition mathématique que l'on peut traduire comme une propriété $P(n)$ d'un certain entier n. Ainsi, par exemple, a-t-on constaté depuis très longtemps que la somme des n premiers nombres impairs successifs était égale au carré n^2 de n. Les vérifications de cette règle sur les petits nombres sont immédiates : 25, le carré de 5, par exemple est bien égal à 1 + 3 + 5 + 7 + 9, soit la somme des cinq premiers entiers impairs. Si les vérifications numériques de cette règle effectuées manuellement ou à l'aide d'un ordinateur peuvent nous donner toute confiance en la véracité de cette coïncidence, il faut une démonstration en règle pour nous en persuader de manière définitive.

PH. HABIB/FOTOGRAM-STONE

Seule une récurrence, dont nous allons donner ici l'essence sous forme d'un calcul algébrique, le permet : soit $P(n)$ la propriété « la somme $f(n)$ des n premiers entiers impairs est égale au carré n^2 de n » ; ainsi $P(5)$ est-elle exacte, puisque nous avons vu que $f(5) = 25$ est le carré de 5. Une démonstration par récurrence consiste essentiellement en deux étapes. L'une d'elles n'est autre que la vérification du cas particulier $P(1)$; dans le cas qui nous occupe, il est clair que $f(1)$, somme du seul élément 1, est bien égale au carré de 1 qui est 1. La seconde est beaucoup plus fondamentale ; il s'agit d'établir que si la propriété $P(n)$ est admise comme vraie, il est alors possible d'en déduire la proposition au rang suivant, à savoir $P(n + 1)$. Nous supposerons donc que $f(n)$ est égale au carré de n, puisque c'est la signification de la proposition $P(n)$ et en déduirons la relation analogue au rang $n + 1$. Dans cet exemple, cette étape est simple, puisque le $n + 1$ ième entier impair est égal à $2n + 1$, et que la différence $f(n + 1) - f(n)$, égale à $2n + 1$, est aussi celle qui sépare $n^2 + 2n + 1$ (le carré de $n + 1$) du carré de n. Pourquoi cette vérification suffit-elle à établir le résultat ?

Il existe évidemment plusieurs justifications de cette règle fondamentale. La plus simple est celle qui fait passer la récurrence sous le joug d'une démonstration par l'absurde : si la propriété $P(n)$ n'était pas vraie pour tout entier n, l'ensemble K des valeurs k pour lesquels $P(k)$ est fausse ne serait pas vide et, comme tout ensemble d'entiers, admettrait un plus petit élément, par exemple noté m. Il serait impossible que m soit égal à 1 puisque par hypothèse, nous avons vérifié $P(1)$. D'après une autre propriété de l'ensemble N* (N* = N - {0}) des entiers, m serait donc le successeur $n + 1$ d'un autre entier $n > 0$, nécessairement exclu de K. Il en résulterait que $P(n)$ serait donc vrai, et par conséquent que $P(m) = P(n + 1)$ serait vrai, ce qui contredit l'appartenance supposée de m à K.

Mathématiquement, on considère généralement que la récurrence repose sur une célèbre axiomatique de N* dite de Peano-Dedekind, datant de 1875. D'après ces axiomes, il existe une application s de N* dans N*, injective mais non surjective, telle que toute partie A de N* contenant 1 et stable par s – c'est-à-dire que l'image s (A) de A par s est incluse dans A – est nécessairement égale à N* tout entier. Cette application n'est autre que la succession, qui à un entier n associe son successeur $n + 1$; ce qualificatif se réfère évidemment à l'ordre naturel des nombres. La récurrence utilisée dans notre exemple dit en effet que 1 est élément de l'ensemble A des entiers n tels que $f(n)$ soit le carré de n contient 1, et que l'hypothèse « n appartient à A » implique la conclusion « $n + 1$ appartient à A », soit enfin « $s(n)$ appartient à A » ce qui est la définition même de la proposition « A est stable par s ».

D'une façon imagée, cette technique est parfois appelée « méthode de la fermeture Eclair », car la manipulation de cet instrument fort commode passe bien par les mêmes étapes : amorçage du mécanisme au démarrage par enclenchement du premier maillon, puis progression régulière d'un élément à un autre par sauts successifs d'un intervalle élémentaire ; l'axiomatique de Peano-Dedekind dit simplement qu'il n'y a pas de limite au principe d'une fermeture Eclair, théoriquement capable de s'appliquer à une couture de n'importe quelle longueur. Si simple qu'elle puisse paraître après qu'on ait été conduit à la pratiquer, la récurrence est le seul cas où, à un niveau non universitaire, un étudiant touche d'assez près à la complexité de l'infini mathématique. □