Actes du Colloque

Algébrisations Géométrisations

Toulouse,
1, 2, 3 Juin 2006

Irem de Toulouse
Commission Inter Irem de Géométrie

André WARUSFEL

Construction ponctuelle des courbes algébriques et résolution géométrique des équations algébriques dans *La Géométrie* de Descartes

Les numéros des pages sont ceux de l'édition originale que l'on peut consulter à très peu de frais dans l'édition bilingue chez Dover. Ceux qui se référeront à l'édition Adam-Tannery (volume VI) y retrouveront facilement la numérotation de 1637.

I Construire pour résoudre, résoudre pour construire

La Géométrie est un livre censé permettre, une fois lu, de maîtriser deux algorithmes théoriques ("la Geometrie, ou c'est seulement la justesse du raisonnement que l'on recherche", à opposer aux "Meschaniques, où la justesse des ouvrages qui sortent de la main est desirée", p. 315) :

1. construire (point par point) toute courbe *reçue en géométrie*, c'est-à-dire algébrique car définie par une égalité $f(x,y) = 0$ où f est un polynôme (cf. p. 316),
2. résoudre géométriquement (c'est-à-dire, à l'ancienne, en exhibant des segments dont les longueurs sont les racines cherchées) toute équation algébrique définie par une égalité $P(x) = 0$ où P est un polynôme (cf. les Livres Premier et Troisième).

La technique du 1, construction des courbes point par point, s'appuie sur la possibilité de résoudre les équations, c'est-à-dire le 2. (cf.

p. 313). Il ne s'étend pas aux courbes telles que la spirale d'Archimède (cf. p. 340).

Inversement, résoudre une équation - le problème 2. - s'effectue, d'après l'algorithmique mise au point (au moins partiellement) par Descartes dans son Livre Troisième, en coupant un certain cercle par une certaine courbe géométrique, construite grâce au 1.

Comment Descartes a-t-il néanmoins pu sortir de ce cercle vicieux? A-t-il privilégié l'aide que l'algèbre apporte à la géométrie - (le 1.) - ou l'inverse (le 2.)? **La Géométrie est-elle un traité sur les courbes géométriques ou sur les équations algébriques**?

II Explicitation du paradoxe

Je suppose ici - ce qui n'est pas le cas, mais a été sincèrement cru par Descartes - que sa technique de la résolution graphique du degré six est bien extensible à tout autre degré : "il ne faut que suivre la même voie pour construire tous ceux qui sont plus composés à l'infini" (p. 413).

Dès lors il est clair que Descartes, par son livre, croit savoir résoudre complètement deux problèmes, (E) et (C), qu'il juge essentiels :

- (E) : il sait comment construire graphiquement les racines de n'importe quelle équation $P(x) = 0$ quel que soit son degré (c'est-à-dire, pour lui, résoudre cette équation); je noterai $E(n)$ sa technique de résolution graphique des équations de degré n.

  (De fait, *La Géométrie* explicite toutes les $E(n)$ pour $n < 7$: 1 et 2 dans le Livre Premier, 3 et 4, puis 5 et 6, dans le Livre Troisième.)

  Pour ce faire, il lui suffit de savoir construire une certaine courbe auxiliaire, de degré m, qu'il coupera par un certain cercle. La lecture attentive du texte montre que m est le plus grand entier inférieur ou égal à $(n+1)/2$, strictement inférieur à n dès $n = 2$.

  Par ailleurs, toute équation de degré impair peut être considérée comme une équation de degré pair dont on connaît une racine arbitraire (0 par exemple); on peut donc supposer n pair (voir par exemple p. 411, où le passage de 5 à 6 est présenté comme naturel).

La citation fondamentale est évidemment ici *comment, par la méthode dont je me sers, tout ce qui tombe sous la considération des Géomètres, se réduit à un même genre de Problèmes, qui est de chercher la valeur des racines de quelque Equation* (p. 401).

– (C) : il sait comment construire point par point n'importe quelle courbe définie par une équation algébrique $f(x,y) = 0$; je noterai $C(p)$ sa technique de construction des courbes de degré p (on dit plutôt d'ordre p, mais c'est sans importance).

(Il ne parle sans doute en fait que des courbes dites de Pappus dont la définition est sans importance ici - parmi lesquelles les coniques -, puis de leurs transformées par divers assemblages articulés - qui forment certes une sous-famille stricte, mais il est secondaire de savoir s'il croyait ou non avoir là une propriété générique des courbes algébriques.)

Pour ce faire, il lui suffit de savoir résoudre toutes les équations de la forme $f(a,y) = 0$ et $f(x,b) = 0$, algébriques et de même degré que f, où a et b sont des constantes arbitraires : *tous les points, de celles qu'on peut nommer Géométriques, c'est-à-dire qui tombent sous quelque mesure précise et exacte, ont nécessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimé par quelque équation, en tous par une même* (p. 319, à la fin du Livre Premier).

Présentés ainsi, ces deux problèmes (E) et (C) sont donc exactement équivalents, mais le fait même que Descartes utilise chacun d'eux pour résoudre l'autre semble un magnifique cercle vicieux.

III Résolution du paradoxe

Or il n'en est rien, et justement parce que $m < n$; un exemple simple le prouve aussitôt :

1. pour résoudre un $C(9)$ (par exemple construire un lieu de Pappus à 18 lignes donc de degré $n = 9$), il suffit de savoir résoudre $E(9)$, donc $E(10)$;
2. pour résoudre $E(10)$, il suffit de savoir construire une courbe auxiliaire - sorte de parabole ultra généralisée - de degré $m = 5$, soit $C(5)$;
3. pour déterminer $C(5)$, il suffit de savoir résoudre $E(5)$, donc $E(6)$;
4. or on parvient ainsi à un problème effectivement résolu à l'aide de $C(3)$ dans le Livre Troisième (pp. 402 à 411).

Le cas général suit exactement ces mêmes lignes : on se trouve devant une *récurrence descendante* qui réussit toujours, et que l'on pourrait même présenter comme une descente infinie à la Fermat. La paradoxe est donc levé : le passage de n à $n/2$ est la clef essentielle de la cohérence du projet cartésien puisque tout cela repose fondamentalement sur l'inégalité $m < n$ (en gros m est la moitié de n).

IV Descartes aurait-il pu faire plus simple?

C'est maintenant le moment de se poser, comme à propos de la construction des normales, la question inévitable : pourquoi ces complications inouïes, alors qu'il suffisait pour Descartes de savoir tracer le graphe de $y = P(x)$, puis de le couper par la droite d'équation $y = 0$?

Tracer $y = P(x)$ est effectivement trivial d'après les techniques des pp. 297 298, où sont explicitement présentées addition, soustraction et multiplication graphiques à la Euclide (voir par exemple la proposition 31 du Premier Élément pour savoir *tracer une parallèle à une droite donnée par un point donné*, technique qui peut d'ailleurs être légèrement simplifiée). La méthode dite de Horner, tout à fait accessible à un algébriste consommé comme Descartes, rend en effet immédiat le calcul de $y = P(a)$ lorsque x prend la valeur constante a.

Cela dit, il n'est pas très facile de justifier pourquoi Descartes n'a pas vu (ou du moins n'a pas utilisé) cette technique si évidente pour nous. Je ne vois que deux pistes : la première est que, si $y = P(a)$ est résoluble en y, en revanche poser $b = P(x)$ conduit à des problèmes exactement équivalents à celui que l'on veut résoudre ! Plus généralement, Descartes veut sans doute croire qu'une courbe est constructible si, et seulement si, on peut déterminer exactement son intersections avec toutes droites, et non seulement celles d'une direction donnée.

Une autre raison, sans doute plus proche de la réalité, est que l'idée "$y = P(x)$" suppose fondamentalement la conception d'un objet mathématique très subtil, qui ne sera progressivement mis à jour que par une lente maturation de la part de Fermat, Newton, Leibniz, Euler, Dirichlet... : celui de fonction. D'ailleurs *La Géométrie*, dans laquelle on peut lire plusieurs équations de courbes, n'indique nulle part explicitement la forme la plus simple et très particulière $y = f(x)$ - même pour une hyperbole (p. 322), tout au plus pour un cercle (p. 342).

V Traité sur les courbes, ou sur les équations?

La question ici posée est évidemment essentielle pour la compréhension du travail de Descartes. Si la lecture de son livre est sans ambiguïté - on comprend toujours exactement de quoi il parle à une page donnée -, reconstituer quel fut son but en s'attelant à sa rédaction est autrement plus délicat à régler : est-ce même sensé? Le livre est sans doute les deux à la fois...

Nous ne la réglerons pas dans le cadre de cet article, où nous nous sommes contentés de définir les problèmes (C) et (E) sans établir d'hiérarchie entre eux. Ce travail sera effectué ailleurs. Qu'il suffise de dire ici que la majorité des historiens penchent pour donner à ce livre un contenu essentiellement tourné vers la géométrie, ne serait-ce qu'à cause de son titre. D'autres imaginent au contraire qu'il s'agit ici du "point final" (ou en tout cas rêvé comme tel) au problème antique de la résolution des équations.

Une ébauche de solution de cette question se trouve sans doute dans la lecture de la Table des Matières de Descartes : dans la première hypothèse elle apparaît comme assez incohérente, surtout en ce qui concerne l'introduction du tracé des normales aux courbes algébriques et à ses applications aux Ovales de Descartes, qui semblent tomber de façon incongrue à la fin du Livre Second; l'autre point de vue permet au contraire de retrouver une logique beaucoup plus forte dans l'étude de la structure de *La Géométrie*, qui cesserait en grande partie d'être une énigme pour les commentateurs.