NANCY 1900 : le Meurtre du Père

Par André WARUSFEL

On trouvera ci-dessous le texte d'une conférence prononcée le 6 septembre 2000 à l'École Nationale Supérieure des Mines de Nancy, lors d'un Colloque consacré à Henri Poincaré et à l'enseignement des mathématiques pour les futurs ingénieurs dans le cadre de l'Année Mondiale des Mathématiques de l'Unesco.

À la mémoire de

Pierre DUGAC (1926-2000)

Biographie abrégée de HENRI LEBESGUE :

Né le 28 juin 1875 à Beauvais (Oise)
1894 Entré à l'École Normale Supérieure
1897 Agrégé de mathématiques (troisième)
1899 Professeur de la classe de Centrale au Lycée de Nancy
1902 Docteur ès sciences mathématiques
1902 Maître de conférences à Rennes
1902–1903 et 1904–1905 Chargé du cours Peccot au Collège de France
1904 « *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* »
1906 Chargé de cours à Poitiers
1907 Professeur à Poitiers
1910 Maître de conférences à Paris
1918 « *Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration* »
1920 Professeur à la Sorbonne
1921 Professeur au Collège de France
1922 Membre de l'Académie des Sciences de Paris
Décédé à Paris le 26 juillet 1941.

Le standard actuel en matière d'intégration a été annoncé par un *Compte Rendu à l'Académie des Sciences* signé, le 29 avril 1901, par un jeune professeur de classe préparatoire à l'École Centrale - nom donné à l'époque à certaines Mathématiques Spéciales - qui la développera et la publiera l'année suivante sous forme d'une thèse qui a fait date, mais qui a bien entendu été conçue lors des années précédentes, et sans doute tout particulièrement il y a exactement un sciècle à Nancy, ville natale d'Henri Poincaré (1854-1912).

Rappelons qu'à peine une génération sépare les deux plus grands analystes français de cette fin de siècle. Nous ne savons pas grand chose des rapports liant les deux hommes; quelques lettres de Lebesgue, publiées en annexe, fournissent un certain nombre de détails qui prouvent qu'ils n'ont été que formels, et qu'il n'existait pas - c'est peu dire - d'atomes crochus entre eux.

Ce colloque a largement évoqué la personnalité du géant que fut Poincaré, premier mathématicien français de l'époque, et sans doute de toute notre histoire. Celle d'Henri Lebesgue, issu d'un milieu très modeste et d'une susceptibilité aussi maladive que sa timidité, est moins connue mais très attachante. Ses démélés avec Émile Borel, qui l'avait précédé de cinq ans sur les bancs du lycée Louis-le-Grand (où il n'avait été admis que grâce à une bourse payée par sa ville natale de Beauvais), mais aussi avec René Baire, l'inventeur des classes de fonctions portant son nom, sont célèbres.

Grand mathématicien fécond et original, reconnu comme tel, il trônera longtemps au Collège de France mais il ne dédaignera pas de s'intéresser à l'enseignement plus ordinaire, notamment en préparant à l'agrégation les normaliens et les normaliennes de l'École de Sèvres, dont des traces nous sont restées par exemple sous la forme de livres sur les coniques ou les constructions géométriques, qui contiennent quelques perles que ne laisseraient pas devenir leurs titres banals. C'est là par exemple que l'on peut voir démontré correctement que les courbes algébriques sont exactement celles qui peuvent décrites par un mouvement mécanique à base de systèmes articulés, idée lancée par Descartes en 1637 et justiifiée par l'avocat mathématicien Alfred Bray Kempe en 1876 (trois ans avant qu'il ne prétende avoir démontré la conjecture de 1852 de Francis Guthrie sur le problème des quatre couleurs). Une « Vie de Lebesgue » reste à écrire. Bien entendu cet homme exceptionnel reste ignoré de la quasi-totalité de ses compatriotes, et il n'existe pas de rue Lebesgue à Paris, ni même de lycée Lebesgue à Beauvais.

Il y a un siècle exactement, on peut dire sans exagérer que les mathématiciens ont assisté, sans le comprendre tout de suite sans doute, à un virage fondamental de l'Analyse. En un certain sens, les psychanalystes pourraient parler ici à juste titre de *meurtre du père*, le cadet reléguant apparemment aux oubliettes l'intégrale qui avait suffi à l'aîné pour construire son œuvre immense. Depuis, tous les professionnels ont remplacé le concept entrevu en 1821 par Cauchy et fixé par Riemann en 1854 par le nouvel outil, qui a déjà connu cent ans de consécration ininterrompue.

L'intégrale de Lebesgue est, par nature même, aussi bien adaptée aux fonctions de plusieurs variables qu'aux fonctions ordinaires, et ce seul point suffirait à prouver son importance pour les mathématiques appliquées et la physique théorique. D'autre part, elle résout en grande partie le problème de la recherche des fonctions primitives, puisque toute dérivée *bornée* admet une intégrale de Lebesgue dont la dérivée est presque partout égale à la fonction donnée. Enfin la théorie de la mesure élaborée par Henri Lebesgue à cette occasion, en rendant plus cohérent et en enrichissant le travail séminal de son aîné de cinq ans et ami Émile Borel (inspiré par Peano et Jordan) était en elle-même une innovation aux conséquences ultérieures considérables.

C'était en partie l'existence des nombreuses difficultés qu'avait rencontrées l'intégrale de Riemann dans la théorie des séries et de la transformation intégrale de Fourier, matrice de l'analyse supérieure, qui avait poussé Lebesgue à chercher une meilleure méthode de « sommation » comme il disait. Sur ce plan, le succès fut exceptionnel. Mais le nouvel outil était aussi sans rival en géométrie, autre source fondamentale d'inspiration; le titre de sa thèse n'est-il pas « Intégrale, longueur, aire » ?

Très vite, d'autres mathématiciens - notamment l'astronome Pierre Fatou (1878-1929) et les Italiens Beppo Levi (1875-1961), qui avait cru apercevoir une erreur grave dans ce qui n'était qu'une maladresse d'exposition, Guido Fubini (1879-1943) et Leonido Tonelli (1885-1946) - ainsi que Lebesgue lui-même parachèvent l'édifice, qui sera complet vers 1910. Il contient alors les célèbres théorèmes dits « à la Lebesgue », qui permettent notamment, dans de très larges conditions, d'échanger sans crainte des limites de suites ou de familles.

Des théorèmes dits « d'interversion des limites » étaient jusque-là, grâce à un résultat fondamental de Weierstrass, limités à des occurences où l'une des limites était obtenue de manière *uniforme*. Dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue, on peut dans un très grand nombre de cas faciles à vérifier intégrer la limite d'une suite d'intégrales, dériver sous le signe somme de Leibniz, intégrer sous le signe somme (interversion des intégrations relatives à x et y dans une intégrale double $\iint f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$) presque comme au temps d'Euler, où ces techniques étaient acceptées sans rigueur excessive. Là encore, cela fait que l'outil mis ainsi à la disposition de mathématiciens non analystes professionnels ou, a fortiori, d'ingénieurs et autres utilisateurs est brutalement devenu beaucoup plus sûr et souple, même si comme nous l'avons dit l'exposer à des étudiants reste toujours délicat, notamment à cause des restrictions du style « presque partout ».

L'un des manques les plus importants de l'intégrale de Lebesgue était qu'elle restait limitée à des fonctions à valeurs réelles ou complexes. Même si ces dernières suffisaient par exemple pour le traitement de l'analyse de Fourier, à l'influence théorique et pratique immense, il est parfois nécessaire de disposer d'une théorie de l'intégration plus puissante. L'extension à des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé complet, ou espace de Banach - du nom de l'un de ses inventeurs Stephan Banach (1892-1945) vers 1920 - est due à Salomon Bochner (1899-1982). Encore plus difficile à exposer que l'intégrale de Lebesgue elle-même, elle reste lourde à employer.

Aujourd'hui, la notion d'intégration a largement débordé l'idée d'attacher à une fonction numérique un nombre possédant quelques propriétés importantes. Une définition beaucoup plus large de ce concept - voir par exemple les travaux d'un André Weil dans Bourbaki ou sous sa plume personnelle - fait que les recherches actuelles sur l'intégration n'ont plus grand chose à voir avec les innovations de Newton et Leibniz, même si bien entendu elles n'en sont que des généralisations très sophistiquées.

L'influence des travaux de Lebesgue fut énorme. Vers 1905, et pour la seconde fois de l'histoire - après les années 1640 avec Fermat, Descartes, Pascal - la France était le pays qui montrait la voie en mathématiques grâce à Henri Poincaré bien sûr, mais proche d'une disparition trop rapide, et l'équipe des jeunes normaliens Lebesgue, Borel, Montel, Fatou, Denjoy, dans laquelle aurait dǰouer un rôle de tout premier plan le malheureux René Baire (1874-1932), dont la santé chancelante limita le temps de recherche à quelques dix années au plus, après des débuts foudroyants qui inspirèrent Borel et même son rival Lebesgue, auquel l'opposa un pénible antagonisme.

Dans d'autres domaines, cette période d'avant-guerre vit aussi les débuts prometteurs d'Élie Cartan (1869-1951) et de Jacques Hadamard (1865-1963). Comme on le sait, la tuerie de 1914-1918 qui fauchera de nombreux jeunes mathématiciens prometteurs sera l'une des raisons qui fera que la suite du vingtième siècle, malgré l'émergence de certaines grandes personnalités, verra diminuer le prestige des mathématiques françaises, même si leur rang dans la recherche mondiale au niveau des pays développés reste encore très supérieur à ce que la stricte démographie semblerait devoir indiquer.

Il y a actuellement de nombreux débats pour savoir s'il est encore nécessaire d'étudier l'intégrale de Riemann dans les premières années d'université. Pour effectuer des études de mathḿatiques aujourd'hui, il est absolument hors de question de n'avoir pas suivi de cours sur l'intégrale de Lebesgue, exacte centenaire, qui est beaucoup plus puissante; mais sa présentation, en dépit des efforts de nombreux chercheurs pédagogues, est encore pénible car il faut parler d'un nouveau mode d'intégration et, en même temps, introduire un concept lourd, hérissé de formalisme, appelé *théorie de la mesure*. Cette théorie est intéressante d'abord en soi, puis pour fonder l'intégration et enfin pour monter une théorie moderne des probabilités : ce fait pousserait à l'étudier au plus vite dans un cursus, mais l'expérience montre que c'est difficile à faire accepter par un étudiant de base.

Aujourd'hui, dans le monde entier, on en est encore semble-t-il à chercher une voie moyenne : d'abord Riemann pour deux ou trois ans (voire une intégrale à la Cauchy limitée aux fonctions continues dites « par morceaux »), puis Lebesgue. C'est d'autant plus tentant que, depuis 1970, une astuce pédagogique qui serait due à Laurent Schwartz - en tous cas elle figure dans ses cours donnés à l'École polytechnique -, permet une présentation extrêmement rapide et simple de l'intégrale de Riemann, y compris pour les fonctions à valeurs vectorielles, à partir de la notion de couple d'applications en escalier approchantes. Une fonction bornée f est intégrable au sens de Riemann sur le segment $[a,b]$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier u et v telles que $|f-u| \leqslant v$ et $\displaystyle\int v \leqslant \varepsilon$. Il n'est pas rare que des mathématiciens de haut rang soient aussi capables d'introduire des nouveautés percutantes dans le domaine de l'enseignement... Il serait à souhaiter qu'il y en ait sans cesse de plus en plus nombreux.

Cela dit, l'intégrale de Riemann possède des défauts qui peuvent paraître rédhibitoires; Ainsi ce point a-t-il inquiété Lebesgue : toute fonction dérivée n'est pas nécessairement Riemann-intégrable. Il est immédiat qu'il existe une fonction F, admettant une dérivée F' non Riemann-intégrable parce que non bornée ; il suffit de prendre l'exemple donné par Lebesgue lui-même :

$$F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$$

complétée par $F(0) = 0$. Il est clair que $F'(0)$ existe et est nulle, et qu'en $x \neq 0$ on a $F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$, qui n'est pas bornée au voisinage de l'origine comme on le voit en considérant des valeurs x pour lesquelles le cosinus vaut 1.

L'existence d'une dérivée *bornée* non Riemann-intégrable est plus difficile à mettre en évidence. D'ailleurs Riemann lui-même en a douté un instant, comme le prouve cet extrait d'une lettre à Émile Borel probablement datée du 7 mai 1901, inaugurant une série découverte en 1988 au sous-sol de l'Institut Henri Poincaré par Jean Lefebvre, actuellement en cours de publication grâce aux efforts des Professeurs Gustave Choquet, Bernard Bru et, surtout, du regretté historien des mathématiques Pierre Dugac. À cette date, Lebesgue était encore professeur de la classe de Centrale au lycée de Nancy.

« Cher Monsieur,

J'ai dit dans ma note qu'il existait des fonctions dérivées non intégrables au sens de Riemann. J'en étais certain, je le suis un peu moins maintenant. Je sais qu'il existe un article de Volterra, *Giornale di Matematiche*, tome 19, page 337, traitant du sujet. Mais je le sais par une citation et le mot allemand *Ableitung* est employé par Lüroth, tantôt dans le sens de dérivée, tantôt pour exprimer les dérivées à droite ou à gauche, tantôt même pour les nombres de Dini. J'ai donc quelques doutes. Fort peu, il est vrai. »

Voici en effet un exemple de fonction dont la dérivée est bornée non intégrable, définie par une somme de série de la forme :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n(x)}{10^n}$$

admettant une dérivée F' que l'on peut obtenir par dérivation terme à terme, c'est-à-dire égale à :

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n'(x)}{10^n}$$

où F' est bornée par $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{10^n} = \frac{20}{9}\cdot$ La définition des f_n est un peu délicate, mais nous la donnons ci-dessous; la démonstration de la non-intégrabilité est plus difficile et nous demanderons de nous croire sur parole, ou de voir par eux-mêmes ce qui se passe (il suffit, d'aprs̀ un résultat bien connu de Lebesgue, de montrer que l'ensemble des points de discontinuité de F' n'est pas de mesure nulle).

Les fonctions f_n dépendent elles-mêmes d'une famille de fonctions à deux paramètres $f_{a,b}$ définies sur $]a, b[$ par la relation :

$$f_{a,b}(x) = \frac{(b-a)^2}{\pi} \sin^2 \frac{\pi(x-a)}{b-a} \sin \frac{1}{(b-a) \sin \frac{\pi(x-a)}{b-a}}$$

prolongée en a et en b par $f_{a,b}(a) = f_{a,b}(b) = 0$. Cette fonction est continue sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$, dérivable en a et b avec $f'_{a,b}(a) = f'_{a,b}(b) = 0$, mais avec en ces deux extrémités des discontinuités pour la dérivée f'.

L'étape suivante consiste à exhiber une surjection de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble de tous les rationnels strictement compris entre 0 et 1; cela résulte du caractère dénombrable du corps $\mathbb{Q}$. Plus précisément encore, c'est un exercice facile de montrer que l'on peut noter $(r_0, r_1, \ldots, r_m, \ldots)$ les rationnels de $]0, 1[$ en imposant une contrainte supplémentaire, à savoir $r_m \in \left] \frac{1}{4^{m+1}}, 1 - \frac{1}{4^{m+1}} \right[$: il suffit d'associer au couple d'entiers (p, q) avec $0 < p < q$ l'entier $m = p - 1 + \frac{(q-1)(q-2)}{2}\cdot$

On pose enfin $A_n = \bigcup_{m=0}^{+\infty} \left]r_m - \frac{1}{4^{m+n+1}}, r_m + \frac{1}{4^{m+n+1}}\right[$, ensemble ouvert, et l'on appelle B_n le fermé complémentaire de A_n dans le segment $[0,1]$. Dès lors la définition de f_n est facile : on prend $f_n(x) = 0$ si $x \in B_n$; sinon, il existe un couple (a,b) et un seul tel que $]a,b[$ soit le plus grand ouvert contenant x et inclus dans A_n (on dit que c'est la *composante connexe* de x), et alors $f_n(x) = f_{a,b}(x)$.

Le dernier travail consisterait à montrer que F est dérivable et donc continue en tout point de $[0,1]$, et que sa dérivée F' est discontinue en tout point de B_0, cet dernier ensemble étant de mesure strictement positive.

Cet exemple très technique est dû au Professeur Jean Varouchas de l'Université de Nancy (voir la *Revue de Mathématiques Spéciales* d'octobre 1975), alors encore étudiant; il en existe d'autres, également plus ou moins simples - comme celui de Volterra -, mais aucun n'est vraiment élémentaire. En un certain sens, cela montre que, si imparfaite que soit l'intégrale de Riemann, il est malcommode de trouver des cas où ses imperfections s'imposent visiblement.

Depuis quelques années, une autre possibilité de résoudre l'irritant problème de l'enseignement de l'intégration dans le premier cycle de l'enseignement supérieur semble pourtant se faire jour. Une intégrale dite de Kurzweil-Henstock, du nom de ses deux découvreurs (le premier a publié en 1957 et le second en 1968), permet d'aborder Lebesgue avec une définition à la Riemann, donc bien plus facile à assimiler. Elle présente un défaut majeur : dans cette théorie, il n'est pas obligatoire pour une fonction intégrable f que sa valeur absolue $|f|$ le soit également. Mais si l'on ajoute cette demande comme axiome supplémentaire, alors on dispose ainsi d'une intégrale qui est exactement celle de Lebesgue, la plus générale étant simplement celle que les mathématiciens du début du siècle Arnaud Denjoy (1884-1974) et Oskar Perron (1880-1975) avaient mise au point, indépendamment, pour trouver une intégrale suffisamment puissante pour pouvoir *intégrer toutes les fonctions dérivées*. L'intégration à la Denjoy est plus connue sous le nom de *totalisation*; pour compliquer un peu les choses, il existe d'ailleurs plusieurs versions d'intégrale de Denjoy, mais ces détails sont superflus ici, la chose à retenir étant que les présentations originales des deux auteurs étaient hérissées de difficultés alors que celle de Kurzweil et de Henstock est bien plus compréhensible.

Indiquons sommairement ce qu'est une somme de Kurzweil-Henstock; extérieurement elle se présente comme une somme de Riemann :

$$S_{(x_k,c_k),f} = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\, f(c_k)$$

à cela près que le nombre c_k est soumis à une contrainte supplémentaire (comme il y a moins de sommes à considérer, il est plus facile pour une fonction d'être intégrable et, paradoxalement, il s'agit donc bien d'une extension). La contrainte est la suivante : on doit se donner une certaine fonction δ, dite *jauge*, définie sur $[a,b]$ à valeurs strictement positives, telle que le segment $[x_k, x_{k+1}]$ soit inclus dans un intervalle de centre c_k et de rayon $\delta(c_k)$. C'est ici l'existence d'une telle fonction δ associée à tout réel ε arbitraire qui décide de l'intégrabilité. Certaines variantes n'exigent même pas que c_k lui-même appartienne à $[x_k, x_{k+1}]$, mais c'est en fait sans grande importance pour notre sujet.

Cette définition permet de prouver, sans autre préambule, que toute fonction dérivée, bornée ou non, est intégrable et vérifie l'égalité $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$. Il suffit en effet de prendre, un $\varepsilon > 0$ étant donné, pour δ l'une des fonctions vérifiant l'implication $|t - x| \leqslant \delta(x) \implies |f(t) - f(x) - (t - x) f'(x)| \leqslant \varepsilon |t - x|$, l'existence d'un couple (x_k, c_k) satisfaisant à la relation $[x_k, x_{k+1}] \subset]c_k - \delta(c_k), c_k + \delta(c_k)[$ résultant d'une variante du théorème de Borel-Lebesgue publiée en 1895 par Pierre Cousin. Cette propriété, qui règle de façon définitive l'un des deux vieux problème de la liaison intégrale-dérivée, est spectaculaire, et aurait sans doute vivement intéressé Lebesgue. Le récent cours d'Analyse publié par Jean Mawhin chez Deboeck donne un exposé complet de sa construction.

Si l'on imposait à δ d'être constante, on retrouverait bien évidemment tout simplement les sommes, et donc l'intégrale, de Riemann. Ces tentatives pédagogiques ont moins de vingt ans; peut-être un nouveau Schwartz lévera-t-il les dernières lourdeurs qui subsistent, auquel cas l'intégrale de Denjoy-Henstock-Kurzweil-Perron deviendra peut-être, soit pour elle-même soit comme marchepied à celle de Lebesgue, le *b a ba* du mathématicien débutant du ving-et-unième siècle.

Ce problème est bien entendu encore plus difficile à régler lorsqu'il s'agit d'enseigner l'intégration devant de futurs ingénieurs. L'orateur interrompt ici son trop long discours pour lancer un débat auquel il espère que voudront bien participer les spécialistes présents, bien conscient qu'une telle discussion, certes fort utile, ne saurait clore une difficile recherche d'efficacité qui préoccupe toutes les équipes responsables de ces formations dont l'importance est capitale pour l'avenir économique et culturel du pays.

ANNEXE

Nous donnons ci-dessous in extenso le texte des lettres de Lebesgue à Borel déjà évoquées où il est question d'Henri Poincaré. Pour une collation commode avec la publication prochaine de cette correspondance, nous avons laissé la numérotation, en chiffres ordinaires, qui sera employée dans l'ouvrage sous presse - où elles sont considérablement enrichies par une préface de Gustave Choquet et de très copieuses notes de Pierre Dugac -, ainsi que la numérotation, en chiffres romains, renvoyant à une prépublication de 1991 dans les *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*. Nous ne les commenterons pas, laissant aux lecteurs le plaisir de découvrir certains apsects saisissants des rapports et préoccupations du monde universitaire de l'époque...

En ce qui concerne les allusions à Henri Poincaré, elles se comprennent en général d'elles-même. Elles prouvent que l'importance des découvertes de Lebesgue n'impressionna que poliment le « patron » des mathématiques françaises, champion national face à l'allemand David Hilbert qui viendra en Sorbonne, le 8 août 1900, lancer ses fameux défis au siècle qui s'ouvrait. Inversement, elles montrent que le cadet ne pouvait s'empêcher, dans l'intimité, de railler le maître, notamment à propos de son entrée sans gloire à l'Académie Française (rappelons que sa candidature avait été suscitée par certains de ses membres pour faire échec à celle, prévisible, de son célèbre cousin Raymond dont les ennemis étaient légion; cette manœuvre échouera d'ailleurs finalement).

Éspérons que ces quelques extraits donneront envie à un large public de découvrir la totalité de cette correspondance à sens unique - les réponses de Borel sont perdues - qui éclairent d'un jour insoupçonné de quoi était faite la vie quotidienne de grands hommes aux prises avec les petitesses de chacun.

31 (XLVI)

Rennes, 6 novembre 1904

Cher Monsieur,

Je ne vous ai pas parlé de M. Le Roux à cause de M. Lacour et de sa si connue susceptibilité. Mes affaires avec Lacour ont empiré, ces jours derniers dans une réunion pour décider des sujets de licence M. Lacour s'est mis à crier comme un furieux et j'ai dû quitter la salle dans l'impossibilité où j'étais d'arriver à me faire entendre. Malgré cela je ne puis m'empêcher de prendre des ménagements à son égard, j'ai tort parce qu'il les considère toujours comme la reconnaissance implicite de mes torts et parce que j'enrage ensuite pendant deux jours d'avoir fait ces concessions.

L'une de ces concessions était de ne pas offrir un tiré à part à Le Roux, qui les lit, sans en offrir un à Lacour, qui ne les lit pas. Pour cette fois je ferai bien volontiers exception, et je dirai à M. Le Roux que vous m'avez demandé de lui offrir un exemplaire. J'ajouterai, on ne peut toujours respecter la vérité, que j'avais d'ailleurs l'intention de lui en donner un.

Le numéro de juin du *Bulletin de la Société Mathématique* est celui où Picard analyse mon livre; sauf l'éternelle phrase de Picard « que je ne perds pas de vue entièrement des parties à lui plus sympathiques des mathématiques », je ne vois rien qui ai pu offenser Baire. Et encore cela est-il assez anodin et je ne pense pas dirigé contre lui.

Je suppose plutôt que Picard a repris cette phrase de l'analyse de ma thèse pour le ministère, qu'il l'a mise dans le *Bulletin* pour l'analyse de ma thèse, puis de nouveau dans le *Bulletin* pour l'analyse de mon livre. C'est d'ailleurs je crois par ce procédé qu'a été fait l'ensemble de cette analyse.

Je lui fais, vous voyez, le reproche de ne pas être très étudiée; mais je ne l'ai pas trouvée hostile comme je m'y attendais et au contraire plutôt bienveillante. Autant qu'il est possible, à mon avis, à Picard, d'être favorable à des travaux de ce genre.

[Voici comment Picard conclut son compte rendu du livre de Lebesgue *Leçons sur l'intégration* dans le Bulletin des Sciences Mathématiques (2), 28 (1904), Première partie, pp. 180-183 :

« Souhaitons que, quelque jour, les notions nouvelles que l'on s'efforce d'introduire dans l'analyse mathématique montrent leur fécondité en avançant la solution de tant de problèmes depuis longtemps posés, ou que pose chaque jour le développement régulier des théories aujourd'hui classiques tant en analyse pure qu'en physique mathématique. Le mot *inutile* n'a guère de sens, quand il s'agit des abstractions mathématiques; nous aimons à nous dire, avec Lagrange, que "*tout est bon en mathématiques*". On peut craindre seulement que certaines spéculations soient parfois prématurées, et penser qu'il ne faut pas d'excès même dans des choses aussi excellentes que la philosophie des mathématiques ».]

J'ai appris que Poincaré trouve mon livre bien; je ne sais pas jusqu'à quel point cela est exact, mais j'en ai été tout de même très flatté; je ne croyais pas que Poincaré sût mon existence.

J'ai reçu ces jours-ci une analyse de d'Ocagne qui a mieux lu, la table des matières au moins, que je ne m'y attendais. De tous ces côtés, je n'ai pas à me plaindre.

Pendant que j'écris ma fille, Suzanne, braille à pleins poumons; elle s'est imaginée stupidement d'avoir mal aux yeux et cela a fort compliqué mes fonctions. Il n'y a d'ailleurs rien de grave de ce côté.

Bien cordialement à vous.

H. Lebesgue

73 (CXVIII)

Poitiers, le 29 janvier 1909

Mon cher Borel,

Il y a longtemps que j'aurais dû vous répondre, mais mille riens m'en ont empêché. La Sicile tremblant il n'y a rien de pressé pour Guccia et puis, je me demande s'il y a quelque intérêt à renseigner les lecteurs des *Rendiconti* sur les absolument je ne sais plus quoi, ma remarque touchant seulement à un point de détail et non à ce qui vous occupe principalement dans votre note. Quant à l'intérêt philosophique que peut avoir le fait de savoir déterminer toujours un point déterminé d'un ensemble de mesure non nulle, il est mince pour tout autre que nous deux. Aussi il me semble mieux de ne rien publier à ce sujet, d'autant que ça ne pourrait être imprimé de suite après votre note et que ça prendrait alors aspect de rectification grandiloquente.

Avez-vous remarqué, je viens de le faire seulement, que la généralisation employée par Stieltjes, dans son grand mémoire, pour l'intégrale définie coïncide avec la mienne. Stieltjes pose $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$ pour désigner la limite de $\sum f(\xi_i)\,[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]$, où $a = x_0 < \xi_0 < x_1 < \xi_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, quand n augmente indéfiniment. Il suppose f continue et φ monotone.

Pour que sa généralisation ait un sens quelle que soit f continue, il faut que φ soit à variation bornée [pour le voir il suffit de prendre $f = 1$] et même qu'on ait toujours $\varphi(x)$ compris entre $\varphi(x-0)$ et $\varphi(x+0)$:

$$\varphi(x-0) \quad \Big| \quad \varphi(x) \quad \Big| \quad \varphi(x+0).$$

Si l'on veut se débarrasser de cela on le peut, mais il faut alors spécifier si l'on prendra toujours les x_i parmi les points de continuité de φ ou si au contraire tous les points de discontinuité de φ finiront par faire partie des x_i. Stieltjes lui-même est à diverses reprises obligé de spécifier qu'il fait la première hypothèse. Passons.

Cette condition ($\varphi(x)$ à variation bornée) remplie, alors $f(x)$ peut être quelconque intégrable au sens de Riemann, la limite existe.

Si φ a une dérivée continue (et par suite est lui-même continu) on a, pour f continue,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x;$$

mais pour les autres cas : Tout d'abord débarrassons nous des points de discontinuité de φ, ce qui introduit dans

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$$

la série $\sum[\varphi(\xi+0) - \varphi(\xi-0)]\,f(\xi)$ étendue à tous les points de discontinuité (infinité dénombrable). Alors soit d'abord un nombre dérivé de φ partout fini, dans ce cas j'ai prouvé que la dérivée existe presque partout, l'ensemble des points où elle n'existe pas pouvant être négligé dans la démonstration de

$$\int_a^b \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}\varphi(x).$$

On a alors de même

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cela suppose seulement que $\varphi(x)$ soit une fonction qui peut être considérée comme une $\int$ indéfinie. Mais si φ étant à variation bornée n'est pas intégrale indéfinie, φ devient intégrale indéfinie par une foule de changements de variable $x = \chi(t)$, en particulier en prenant pour t l'arc de $y = \varphi(x)$. Alors on a : $\varphi[\chi(t)] = \Phi(t)$, qui a une dérivée presque partout, et on peut écrire

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x) = \int_\lambda^x f[\chi(t)]\,\Phi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si en particulier t est l'arc indiqué on a :

$$\int_{s_0}^{s_1} f[\chi(s)]\,\Phi'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{s_0}^{s_1} f\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s = \int_{\text{le long de } y=\varphi(x)} f\,\mathrm{d}y$$

en tant qu'intégrale curviligne.

Vous voyez d'une part que le symbole de Stieltjes soulève une question : généralisation du passage classique de la dérivée à la fonction primitive, d'autre part que mon intégrale permettrait une exposition nouvelle du Stieltjes.

Bien cordialement.

H. Lebesgue

Je viens de lire la réponse de F. Masson à Poincaré. C'est roulant : je trouve très moral que l'imbécilité de Poincaré allant offrir sa supériorité à l'Académie Française soit récompensée ainsi.

D'abord une élection à quelques voix seulement de majorité sur un Charles de Pomairols : puis la réponse de Masson.

[F. Masson, historien de Napoléon, disait dans son discours de réception du 28 janvier 1909 :

« Ainsi porté par les suffrages de tous ceux qui étaient dignes de vous entendre, vous vous êtes présenté à nous. L'Académie n'a sur une œuvre telle que la vôtre aucune juridiction; mais, par une tradition plus que trois fois séculaire, à chaque fois que, dans l'Académie des Sciences sa sœur cadette et son émule, elle a vu s'élever un homme d'un mérite exceptionnel, qui fût en quelque sorte désigné par le suffrage de ses pairs, elle a désiré se l'adjoindre, non seulement parce qu'elle tient à honneur de rester ouverte à toutes les illustrations nationales, mais parce qu'il lui importe de s'assurer l'active collaboration de savants prêts à l'éclairer sur la signification et l'usage des mots que les sciences naturelles, physiques et mathématiques fournissent à la langue. L'évolution que cette langue subit depuis trois quarts de siècle pour acquérir des mots correspondant à des connaissances nouvelles lui rend l'accession d'hommes de science plus désirable qu'elle ne fut jamais. [...] N'étant arrêté par rien que vous acceptiez de confiance et a priori, vous élevez votre doute en face de cette science officielle et vous en sondez le néant. Ainsi votre œuvre est double : par les mathématiques, vous dressez à la vérité scientifique un temple accessible seulement à quelques rares initiés, et, par vos engins philosophiques, vous faites sauter les chapelles autour desquelles s'attroupent, pour célébrer les mystères d'une prétendue religion de la science, des foules rationalistes et libérées qui, par un certificat d'études primaires, ont acquis le droit de ne croire rien qui ne leur ait été démontré. [...] Est-ce à dire, Monsieur, que vous doutiez plus de la Science que de la Vérité ? Ni de l'une ni de l'autre : mais celle-ci s'éloigne constamment devant celle-là et, à proportion que l'homme franchit une étape, les espaces qu'il devra parcourir reculent devant lui; par delà la steppe dont son regard embrasse l'étendue, d'autres l'attendent, et toujours d'autres, car celui-là seul est assuré d'arriver à son but qui en est resté au rudiment — et qui l'a appris par cœur. »]

Pour celui-ci on a reçu Poincaré parce qu'il faut quelqu'un pour expliquer dans le dictionnaire les mots scientifiques. Quant à l'ensemble des travaux de Poincaré c'est de la culture primaire. Pour le scepticisme scientifique de Poincaré c'est la preuve de faillite de la science et de triomphe prochain de la foi.

Bravo !

82 (CXXIX)

Poitiers, le 9 octobre 1909

Mon cher Borel,

Tout d'abord, bien que je ne m'en fasse pas généralement un titre de gloire, laissez-moi vous apprendre que je fus en mon temps refusé au baccalauréat.

Il me semble que vous errez dans votre comparaison avec Painlevé.

[À propos de cette lettre, Pierre Dugac pensait que Borel avait dû rappeler à Lebesgue, comme il le fera en 1950 dans la notice nécrologique de Jules Drach dans le bulletin de l'Association Amicale des Anciens Élèves de l'École Normale Supérieure, que Painlevé avait été collé au baccalauréat et que Poincaré avait failli l'être avec un zéro en mathématiques, que Drach et Lippmann n'avaient jamais réussi l'agrégation et que les concours et les examens étaient, suivant la formule de Joseph Bertrand, « la moins mauvaise façon de choisir au hasard les candidats ».]

Suivant la forte remarque de Picard au sujet de Boutroux nos travaux ne sont pas sans relations avec les jugements que nous portons sur les mathématiques et les mathématiciens modernes. Il est certain si, pour prendre cet exemple que vous choisissez, j'attache quelque prix à mon travail sur le principe de Dirichlet c'est parce que j'y ai utilisé une idée simple et que je crois féconde, savoir : si des fonctions f sont monotones et telles que

$$\iint \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

soient bornées, elles sont également convergentes. En d'autres termes c'est l'intégrale que l'on veut rendre minimum qui détermine elle-méme le caractère d'égale convergence à employer. Si j'ai été conduit à cela, c'est que depuis longtemps je m'étais dit qu'il fallait rechercher une solution n'impliquant aucune de ces restrictions bonnes seulement pour les besoins de la démonstration particulière que l'on essaie. Et je recherchais cela parce que j'étais persuadé que, là comme pour l'intégration, le procédé applicable de suite au cas général, c'est-à-dire à celui dans lequel on a le minimum de données, ne s'appuierait que sur ce qu'il y a d'essentiel dans la question. En fait, tandis qu'il faut à Poincaré un appareil analytique assez compliqué pour résoudre le problème de Dirichlet, c'est un calcul de trois lignes qui me montre l'existence de la solution et légitime le procédé même du balayage, employé par Poincaré.

C'est à cause de cela que les travaux qui finissent ne me paraissent pas négligeables, surtout si, pour finir, ils utilisent une voie nouvelle de quelque manière.

Quant à l'intérêt que peut présenter mon travail sur Dirichlet : Ce n'est pas prolonger un rameau déjà trop long si, en fait c'est cela, je reprends du début et vais d'un coup plus loin que mes devanciers. Et puis ce n'est pas de ma faute si ce rameau se prolonge. Prenez les fonctions de Pompeiu et Denjoy qui sont continues dans tout leur domaine d'existence, frontières comprises. Ces fonctions sont évidemment déterminées par leurs valeurs aux points singuliers, c'est le même raisonnement que celui sur l'unicité de la solution du principe de Dirichlet et la recherche de la fonction connaissant ces valeurs singulières, c'est la résolution du problème de Dirichlet dans un cas plus général encore que celui que j'ai traité. Puisque, suivant Pompeiu et Denjoy, les seuls points singuliers peuvent ne pas former de séparation du plan. Pompeiu résoud la question dans un cas par une $\iint$, mais évidemment la question générale se pose. Ce n'est pas moi qui suis le coupable. Je ne parle pas des prolongements par questions analogues au problème de Dirichlet relatives aux autres équations aux dérivées partielles.

Mais tout cela n'est pas la question. Je m'étonnais, dans ma dernière lettre, de la façon dont les pontifes m'apprécient et par suite j'essayais de juger mes travaux à *leur* point de vue. Or, que la solution générale du principe de Dirichlet ait ou non un intérêt, ce n'est pas moi qui l'ai posée. Tous ceux qui se sont occupé de cela mettent en évidence le petit progrès qu'ils ont fait relativement à la forme du contour et voyez combien Picard dans son *Traité* fait ressortir ces progrès. Il y a donc là une de ces questions de « concours général » dont vous parlez. De même ce n'est pas moi qui ai posé la question de trouver des caractères de convergence des séries de Fourier de plus en plus compréhensifs. J'ai cependant le prix pour l'instant, mais je dois employer des procédés déloyaux pour résoudre les questions car ça n'a pas l'air de compter plus que certaines roulées administrées en dehors des formes dans les concours de boxe. Il paraît que le Cauchy présentait une difficulté, j'avais entendu dire cela au moment des leçons d'agrégation et, respectueux, je l'ai cru sur parole d'autant plus qu'Hadamard l'a répété à diverses reprises. C'était ceci : quand les arêtes ne sont pas toutes affectées de signes, celles qui en ont peuvent former des divisions non simplement connexes et le $F + S = A + 2$ ne marche plus. Mais il suffit de regarder pour voir que cette inégalité et les analogues sont modifiées dans un sens tel que l'impossibilité d'où découle la conclusion de Cauchy est plus manifeste encore.

J'étais tellement persuadé de la réalité de la difficulté que je n'ai fait cette vérification qu'après avoir recherché un artifice géométrique tranchant la difficulté et parce que cet artifice prouvait clair comme le jour qu'il ne devait pas y avoir de difficulté.

La question du coloriage n'est pas résolue, elle n'a pour moi que l'intérêt de la difficulté à vaincre; c'est du sandow. Mais vous savez qu'on ne tire sur les sandows qu'un quart d'heure tous les 2 ans. Vous m'aviez peut-être parlé de votre livre; je n'en avais aucun souvenir.

Bien à vous.

H. Lebesgue

Je vous renverai votre préface si elle doit vous compléter une série d'épreuves.

84 (CXXXI)

Poitiers, le 20 novembre 1909

Mon cher Borel,

Je viens d'aller lire le Poincaré, je suis tout à fait d'accord avec lui. L'exemple de Russell du début montre bien que la difficulté dans le paradoxe de Richard vient du fait que le $u_1, u_2, \dots$ n'est pas défini.

Ceci étant; vous, ayant lu cela, et d'ailleurs ayant au préalable écrit des choses équivalentes, pourquoi remplacez-vous la bonne explication par une que je considère comme mauvaise ?

2 bouquins de la collection parus, 2 sous presse, quelle production !

Bien à vous.

H. Lebesgue

87 (CL)

Poitiers, le 30 mai 1910

Mon cher Borel,

J'attends une autre lettre de vous, mais je réponds en attendant à celle de ce matin.

Vessiot a des qualités pédagogiques certaines, mais il faut tenir compte de ce qu'il travaille sur un sujet bien étudié où les questions sont nettes et relativement facilement résolubles jusqu'au bout, qu'en somme il est relativement facile de construire une belle route dans un pays bien connu mais qu'il y a cependant plus de mérite à créer une piste dans une forêt vierge.

Et puis, qui me lit ? Personne en France. Les mieux intentionnés lisent le préambule puis, rapidement, ils sautent des pages et courent aux énoncés. Alors comme ce sont des questions qu'ils n'ont pas étudiées, ils n'en voient pas l'intérêt et disent que mes travaux sont quelconques. Puis, comme tout de même la vérité finit par se faire jour, il apparaît que mon travail n'était pas sans portée, alors, repensant à ce qu'on a lu, ou se reportant à mon travail, on constate que j'avais bien dit telle chose mais comme il faut bien qu'on se trouve une excuse à soi-même on dit que je rédige fort mal, que je ne mets pas les choses en évidence.

Et voilà pourquoi mes travaux récents sont médiocres et mes premiers mal rédigés !

Mais vous tombez d'accord avec Picard que je ne mets pas mes résultats en évidence. Précisez, je vous prie.

Oui peut-être eût-il mieux valu pour moi ne rien faire après ma thèse et passer mon temps à en chanter les mérites, mais ce n'est pas mon genre. Tout ça me dégoûte.

Quant à l'histoire Raffy, elle m'a donné l'occasion d'expliquer à ma femme le sens des expressions Raffyfiture et Raffybre, mais je n'y attache pas d'autre importance. Je suis fort aise de ne pas avoir à souhaiter la mort de ce sinistre bougre; sa mort ne me servirait pas. Si Guichard est nommé à la place de Raffy, Darboux ne prendra pas sa retraite d'une façon anticipée surtout si ça pouvait me servir. Or il n'est atteint par la limite d'âge qu'à la fin de l'année scolaire 1916-1917.

La possibilité de devenir maître de conférences à la Sorbonne en octobre 1917 est pour moi de nul intérêt. Pour moi c'était cette fois ou jamais.

Soit, c'est jamais. Mais comme vous le prévoyez ça n'est pas très encourageant. Et pour commencer j'abandonne tout travail, je rejette toute pensée mathématique jusqu'à la rentrée.

Oui, il y a de la faute des circonstances dans la lenteur des mouvements sur Paris mais si, à l'époque de Picard, on avait tenu compte de l'ancienneté comme il veut le faire, croit-il qu'il serait arrivé aussi jeune ? Et puis il y a 2 façons de tenir compte de l'ancienneté. Sa façon, mais aussi comparer mes travaux à ceux que Vessiot et Guichard avaient publiés à 35 ans. Ce serait la façon juste de tenir compte de l'ancienneté. Il y a à considérer la fécondité et la valeur, d'où nécessité de comparer à âge égal. Les travaux au-dessus de 35 ans n'ont à intervenir que s'ils modifiaient l'opinion première.

Je voterais pour Guichard. Guichard et Vessiot sont deux hommes intelligents et comprenant les maths. Ils ont publié des travaux intéressants quoique de second ordre; il n'y a entre eux que la différence de qualités pédagogiques (et certes Guichard ne met pas en évidence ses résultats, grâce à ces notations 20, 30, etc. on croirait presque qu'il n'en a pas). Mais cette différence me paraît être compensée par la différence d'âge et comme j'ai avantage à ce que ce soit Guichard...

J'ai reçu votre, vos, autres lettres.

Peu importe l'opinion de Poincaré entre Vessiot et Cartan; il n'y a plus de compétition Vessiot-Cartan, mais Vessiot-Guichard-Lebesgue-Fabry, etc. Poincaré m'ignore; ce que j'ai fait ne s'écrit pas en formules.

Soyez rassuré j'étais décidé avant votre réponse à ne pas écrire dans le sens indiqué à Picard. À quoi bon ? Mais il faut bien que je lui réponde et vous devinez que je le fais sans ménagements superflus. Oh! je suis très poli; mais je répète ce que je vous dis au début et je lui laisse comprendre que pour moi son jugement est dû à une incompréhension. (Peut-être aussi à de l'orgueil. Lui, il était naturel de le nommer jeune contre des candidats âgés, mais moi !)

Décidément ceux pour qui la mort est l'entrée dans la vie éternelle ont bien peur de cet incident minuscule.

Le livre de Fabry est grotesque, on le croirait pensé et rédigé par d'Adhémar.

Mon cher Ami, je bouge en écrivant à Picard, mais c'est que je n'ai aucune confiance dans le présent et que l'avenir ne m'intéresse pas. 4 ou 5 ans, comme vous dites, ou l'∞ c'est pareil. Cette fois ou non, et ce ne sera pas cette fois. Malgré cette conviction je vous envoie la liste que vous me demandez.

Quant à la maison de Drach elle est pleine d'inconvénients.

M. Appell est bien gentil de trouver qu'on pourra me pardonner 39 ou 40 ans si l'on nomme cette fois des gens de 45 ou 48.

Je crois que jeudi il y aura discussion et que ça ne changera aucune des voix comme toutes les discussions. Gladstone disait : J'ai entendu des quantités de discours dans ma vie, un seul a changé mon opinion mais il n'a pas changé mon vote.

Bien cordialement à vous et merci.

H. Lebesgue

88 (CLX)

Mardi, 5 juillet 1910

Mon cher Ami,

Je rentre de Niort et je trouve vos 2 lettres, elles me prouvent que Picard est bien pour moi et que Poincaré l'est aussi ce dont après tout je doutais. J'ai vu Poincaré et nous n'avons parlé que de Drach. Au commencement de la conversation, tout en parlant de Drach en termes sympathiques, il m'a semblé qu'il ne lui rendait pas justice; je me suis efforcé de lui faire comprendre l'importance de la notion d'irréductibilité. Je n'y suis parvenu qu'imparfaitement parce que, cela ne vous étonnera pas de Poincaré : « Classer les problèmes, ce n'est pas les résoudre ».

Mais j'ai obtenu qu'il regarde le mémoire de Drach. Il l'a fait devant moi, avec une rapidité stupéfiante. Presque le temps matériel de couper les pages et il appréciait cependant. Même, d'après ce que m'avait expliqué Drach, assez justement il me semble.

Je n'ai vu ni Darboux, ni Painlevé je vous l'ai dit.

Je crois que c'est de Goursat que les choses dépendent. On n'obtiendra rien d'Andoyer, quant à Painlevé il faudrait évidemment qu'il soit absent. (Car je ne crois pas au succès possible de Drach que Painlevé soutiendra sans le vouloir.)

Pour ce qui est de Drach, j'ai l'impression que sa candidature lui a été très favorable, qu'elle l'aurait été plus si, plus habile, il avait évité de soulever une question de personnes, étant donné surtout que Vessiot est sympathique à tous.

Pour la question traitement. Il serait injuste de me donner 9000; mais je ne serais pas fâché d'avoir 7500.

Que la question se règle au plus vite, grand Dieu.

Ci-jointe une photographie des enfants (faite par un de mes beaux-frères) pour que Mme Borel compare avec les enfants des Duclaux. Mes malheureux petits ont la coqueluche en plein, mais nous ne les soufrons pas.

Amitiés et merci.

H. Lebesgue

91 (CLXXXI)

Mon cher Ami,

[Envoyée de Poitiers le 16 novembre 1910 (cachet de la poste).]

Décidément vous refusez de me comprendre. Je n'ai jamais douté que MM. Appell, Picard, Poincaré et Borel se souviendraient qu'ils m'avaient proposé avant Vessiot (et je leur suis reconnaissant d'avoir saisi l'occasion de l'affirmer), mais du point de vue pratique (auquel vous me conviez à me placer) ça ne m'avance en rien. Sans doute en disant cela j'ai l'air de mettre en doute leur puissance, mais certes je la mets en doute et je ne crois pas les insulter pour cela, car je crois que la puissance n'appartiendra pas de longtemps aux plus dignes, de même que je crois que la majorité sera longtemps encore formée d'imbéciles. Constater, après qu'ils viennent seulement de remporter un demi-succès, qu'un adjuvant pourrait ne pas nuire et même être indispensable à un succès futur, en quoi est-ce manquer aux convenances ?

Je comprends la mauvaise humeur de la maîtresse de maison qui ayant préparé de ses blanches mains un savoureux entremets s'en voit refuser sous prétexte de régime. Mais je ne la comprendrais plus si le refus avait été précédé de l'énumération des conséquences très graves et très probables de ce manquement de régime, insignifiant en apparence. Je comprends qu'on combatte mes raisons, qu'on me traite de fou, et je m'en étonne d'autant moins qu'on ne m'a jamais compris quand je disais que pour moi comme pour Vessiot c'était la dernière fois; mais qu'on considère que je manque à des devoirs de reconnaissance parce que j'hésite avant d'engager ma vie dans ce qui me paraît une mauvaise voie, ça me paraît un peu gros. En vérité, si l'on doute autant de mes qualités morales on a eu tort de me pousser à un instant quelconque; toutes les qualités mathématiques du monde ne rachèteraient pas un tel défaut.

Je n'ai pas écrit au Doyen en effet et j'aurais été mécontent (de moi-même) si mes lettres avaient influé sur ses actes. Que Liard ait agi suivant son droit et son devoir en intervenant, qui en doute ? Mais qu'il ait mieux rempli son devoir en recevant le concurrent de celui en faveur de qui il se savait prévenu, qui pourrait en douter ?

À vous.

H. Lebesgue

105 (CCXV)

Paris, 31 mars 1915

Mon cher Ami,

Il est urgent que, pour la cordialité de nos relations futures, nous nous engueulions quelque peu.

Le motif apparent sera l'incident d'hier, bien qu'il n'ait rien à voir avec la question, et que je me refuse à lui accorder une importance quelconque à moins que vous m'en priiez absolument. Je pense même qu'il vous a échappé : Hier, j'étais avec Montel, vous vous êtes précipité sur lui, sans répondre à mon bonjour. Je suis intervenu dans votre conversation, vous ne m'avez pas entendu. J'ai continué à accompagner Montel, vous m'avez fermé la porte au nez. Je suis resté dans une salle sur le passage, vous êtes sorti sans me voir et sans me chercher.

Je n'attache à cela aucune importance; permettez-moi de vous dire seulement que vous seriez imprudent en généralisant cette façon de faire.

Cet incident est sans importance, mais il m'a mis en colère cependant, preuve que j'avais eu tort de ne pas régler les questions en suspens, sur lesquelles je reviens donc.

Je n'avais pas demandé à être mêlé à ces histoires de repérage; vous m'avez un jour convoqué. Dès que j'ai compris que je ne comprenais pas ce qu'on attendait de moi je vous ai écrit; vous ne m'avez pas répondu ni par écrit, ni même nettement quand je vous ai vu, bien qu'alors je vous ai posé, à vous-même, la question.

Après deux séances d'arpentage je vous ai récrit en vous disant les raisons qui me faisaient me désintéresser de plus en plus de la chose. À ce moment une indisposition m'a empêché d'aller au Mont Valérien avec vous et je ne vous ai vu que huit jours après. Il a fallu que ce soit moi qui mette la conversation sur le sujet du repérage; vous m'en avez parlé très vaguement, si vaguement que vous m'avez dit : « Oh ! si ça vous intéresse vous pouvez venir avec moi au laboratoire de physique ».

Qu'auriez-vous pu dire d'autre à quelqu'un qui se mêlerait d'une affaire dont on ne lui aurait jamais parlé ?

Cette forme de congé m'a surpris assez de vous à moi pour que je n'ai rien trouvé à dire sur le moment et pour que, naturellement, j'enrage depuis de ne rien avoir trouvé à vous dire. Surtout ne me dites pas que je vous avais déclaré me désintéresser de la chose et ne faites pas semblant de ne pas avoir compris que, quand vous me disiez qu'il y avait à faire pour des mathématiciens, et que moi je vous répondais que la question ne m'intéressait pas parce que je n'y voyais rien à faire, cela voulait dire : voici ce que j'ai cru comprendre, expliquez-moi en quoi je me trompe et montrez moi les motifs d'intérêt.

Si vous me trouviez vraiment un collaborateur indésirable, pour mon scepticisme ou pour toute autre raison, de vous à moi ça pouvait se dire. Ce que je n'admets pas c'est la façon oblique, *sans histoire*, dont la question s'est réglée.

Je hais le *sans histoire*.

Il y a un an, à l'occasion de la mécanique céleste, vous m'avez fait comprendre que bien des gens n'hésitent pas entre deux solutions dont l'une est sans histoire.

[D'après Pierre Dugac, Lebesgue a dû être candidat à la chaire de mécanique léleste de Poincaré lors de sa vacance en 1912.]

Et j'avais été choqué que ce soit moi que vous attrapiez. Je vous en prie, réagissez, ou vous prendriez l'habitude du sans histoire pour ligne de conduite. Je le regretterais beaucoup car vous n'avez pas eu peur jusqu'ici des histoires.

Bien entendu cette lettre n'appelle aucune conclusion pratique; ça ne veut pas demander du tout qu'on me réinvite à porter un piquet ou une chaîne d'arpenteur. J'ai trop la sensation de mon inutilité et trop d'orgueil pour accepter que certains puissent me croire utile alors que je me sais inutile. La conclusion de cette lettre est seulement ceci : ce ne serait pas la peine d'être des amis (ou plutôt la joie) si l'on ne devait pas se parler franchement et sans réserve même et surtout quand on n'est pas d'accord.

Bien à vous.

H. Lebesgue

Reçu une carte de St Jean le Thomas.