NVLLVM NON PROBLEMA SOLVERE.

INTRODUCTION

par **André Warusfel**

« **Je commence en cela par où Viète avait fini** » avait écrit Descartes à Mersenne le 31 mars 1638 dans la lettre CXIX de AT II page 82. Il faisait manifestement allusion ici à la page 20 et dernière du *In Artem analycitem isagoge* publié à Tours en 1591, où l'on voit par ailleurs par exemple un début d'utilisation systématiques de lettres pour représenter les nombres. Cette phrase célèbre fut traduite en français en 1630 par Anthoine Vassset - sans doute Claude Hardy, ami de Descartes - sous la forme savoureuse **soudre tout problème**, alors que la même année l'autre traducteur Jean-Louis Vaulézard préféra le plus doux **donner solution de tout problème** [le robot traducteur de Google ne comprend pas la double négation qui nous sert un bien plat *ne pas résoudre le problème*, promettant ainsi une fort piètre société « numérique » piège à gogos incultes].

Il y reviendra dans une autre lettre à Mersenne de fin décembre 1647 (XCVII*bis in* AT I 479), où il explique benoîtement que « *tant s'en faut que les choses que j'ai écrites puissent être aisèment tirées de Viète, qu'au contraire, ce qui est cause que mon traité est difficile à entendre, c'est que j'ai tâché à rien n'y mettre que ce que j'ai cru n'avoir point été su de lui, ni par aucun autre. Comme on peut voir, si on confère ce que j'ai écrit du nombre des racines qui sont en chaque équation dans la page 372, qui est l'endroit où je commence à donner les règles de mon algèbre, avec ce que Viète en a écrit tout à la fin de son livre* De emendatione æquationum ; *car on verra que je le détermine généralement en toutes équations, au lieu que lui n'en ayant donné que quelques exemples particuliers, dont il fait toutefois si grand état qu'il a voulu conclure son livre par là, il a montré qu'il ne le pouvait déterminer en général. Et ainsi j'ai commencé où il avait achevé ; ce que j'ai fait toutefois sans y penser.*

Ce qu'il fait dans *La Géométrie*, c'est simplement souder à jamais algèbre et géométrie - donc toute la mathématique qu'il connaissait - en plaçant la seconde sous l'autorité définitive de la première. Leibniz dit de Malebranche, pour s'en moquer : « *il croit l'Algèbre la première et la plus sublime des sciences* » (à Tschirnhaus, 12/84). Pierre Boutroux traite d'ailleurs pour cela Descartes de « *premier parmi* [...] *les algébristes du XVIIème siècle* » in L'idéal des mathématiciens, p. 110. Le lien est évidemment l'emploi de la géométrie analytique, véritable opération de « chiffrement » des figures (selon l'heureuse expression de Pierre Costabel), mais la relation entre les deux disciplines est assez complexe. D'un côté la géométrie est soumise à l'algèbre, car tout problème la concernant est désormais (théoriquement) ramené à une simple vérification sur des nombres - c'est évidemment le point de vue traditionnel sur l'invention de la géométrie cartésienne -.

Mais d'un autre côté la géométrie rend un service inestimable à l'algèbre en réglant le dernier problème des mathématiques : expliciter graphiquement les racines d'un polynôme arbitraire. En retour l'algèbre conquérante paie ses dettes à la géométrie, permettant de répondre à toutes les questions que pose une courbe, comme sa construction point par point à partir de son équation, ou l'algorithme de détermination de ses tangentes (≪ *le problème le plus utile, et le plus général non seulement que je sache, mais même que j'aie jamais désiré de savoir en Géométrie* ≫ [AT VI, 413]), qui apporte la brillante solution à une importante question de Physique et constitue justement la seule exception à l'homogénéité d'**un projet en principe tout entier tendu vers la résolution générale des équations algébriques**.

En tout cas il confirme dans le livre même (III, p. 401, AT VI 475) cette dernière proposition que nous venons d'écrire sous la forme des plus explicites ≪ *Il est vrai que je n'ai pas encore dit sur quelles raisons je me fonde, pour oser ainsi assurer si une chose est possible ou ne l'est pas. Mais, si on prend garde comment, par la méthode dont je me sers, tout ce qui tombe sous la considération des Géomètres, se réduit à un même genre de Problèmes, qui est de chercher la valeur des racines de quelque Équation* ≫.

La Géométrie est donc le Traité expliquant comment résoudre les équations les plus générales (polynômiales, puisque l'analyse, avec ses fonctions non polynômiales n'existe pas encore) *par des constructions géométriques de segments ayant pour longueurs respectives les différentes racines de l'équation*. Pour trouver une méthode générale de résolution, il faut d'abord disposer d'un critère efficace de classification des équations, ce qui est fait en particulier grâce à l'utilisation du fameux problème de Pappus, qui n'est pas pour rien dans la réputation d'obscurité du Traité. Ce problème figure dans les deux premiers Livres de *La Géométrie* avec deux fins bien précises : tout d'abord légitimer la qualité de l'auteur (assez fort pour avoir su résoudre un problème remontant pratiquement à l'Antiquité) ; et surtout introduire à une *classification des équations* et une *extension* considérable du stock des *courbes* disponibles pour la recherche mathématique qui s'imposèrent pratiquement comme indispensables pendant les siècles qui suivirent, dégageant de ce fécond travail de pionnier des outils théoriques et pratiques d'une puissance impressionnante.

Contrairement à ce que l'on a pu penser (≪ *le désordre apparent de La Géométrie* ≫, L. Brunschvicg, *Les Étapes de la philosophie mathématique*, 1912, p. 120), le plan de *La Géométrie* n'est pas si obscur qu'il y paraît au premier regard, il est même tout à fait rationnel, y compris dans le détail, si l'on garde à l'esprit le projet cartésien exposé plus haut. Le Traité s'ouvre sur un exposé de constructions (comme celle de la racine carrée) parce que Descartes en a besoin pour les équations du second degré ; cela fait, il les traite aussitôt. Il se ferme sur la résolution des équations de degré cinq et six et sur une esquisse d'un algorithme général. Après cela, il n'y a en effet pour Descartes plus rien à dire ni à faire d'important : ainsi est affirmée avec force ce qui est, à notre avis, l'épine dorsale de tout le Traité, consacré à sa technique originale et supposée définitive de résolution des équations algébriques. Seule une partie du Traité pourrait en être enlevée sans mettre complètement à terre le projet cartésien : c'est la dernière du Livre Second, destinée à prouver la puissance de sa méthode. Mais l'orgueil de Descartes n'aurait pu admettre qu'il passât sous silence l'un de ses plus grands triomphes personnels, la découverte d'une construction (presque) générale des tangentes et des normales à une courbe, dont il a d'ailleurs besoin pour justifier, non sans peine mais avec brio, ce qu'il a dit dans *La Dioptrique* au sujet des Ovales et de la réfraction [AT VI, 185].

Il n'est pas absolument clair que la résolution graphique des équations de degré trois et quatre, qui n'impose pas de recourir au nouvel outil qu'est la géométrie analytique, ne vient pas tout de suite après celle des équations du second degré. Une réponse possible est qu'elle exige beaucoup plus que règle et compas (il faut une parabole). Une seconde est que sa place est liée à la grande difficulté et à la profonde originalité de la technique de résolution des équations de degré cinq et six, qui ne peut paraître naturelle que par analogie avec le cas immédiatement précurseur.

Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites

Le Livre Premier, très court (moins d'un septième de l'ensemble), met en place les éléments fondamentaux sur desquels l'algorithme général de résolution des équations pourra ensuite s'appuyer : les règles fondamentales pour traduire géométriquement les opérations de base (addition, multiplication et même extraction de racine) sont tout d'abord établies, avant que ne soient introduites les techniques de la géométrie cartésienne (analytique) proprement dite, à travers l'évocation et un premier traitement du problème de Pappus qui semble avoir servi de déclencheur à la démarche de Descartes. Il donne donc d'abord les constructions géométriques élémentaires concernant le produit et le quotient de deux nombres, ainsi que la racine carrée d'un nombre à partir de segments donnés, qui peuvent s'obtenir à la règle et au compas. Il décrit ensuite les préceptes à suivre dans sa géométrie à l'occasion d'un texte majeur [AT VI, 372], où il explique qu'il faut **nommer** les différentes grandeurs géométriques d'une figure, les classer en connues et inconnues, mettre en équation et résoudre ces équations. Il applique aussitôt constructions et règles ainsi introduites aux problèmes liés aux équations du second degré, faisant même au passage un peu mieux qu'Euclide, qui avait traité le même sujet mais de façon plus désordonnée.

La fin du Livre Premier introduit le problème de Pappus. Surprenante aux yeux d'un contemporain, cette partie est pourtant essentielle pour les deux raisons suivantes : légitimation de la géométrie analytique par l'exposé d'une solution neuve à un défi ancien, et mise au point d'un atelier fournissant à la demande des courbes de plus en plus complexes définies par des équations de degré de plus en plus élevé, mais néanmoins introduites à partir d'une préoccupation géométrique, justification aujourd'hui incongrue mais qui était très certainement nécessaire pour l'époque. C'est là qu'arrivent enfin, presque incidemment [AT VI, 383], x et y, l'abscisse et l'ordonnée, qu'on retrouvera plus loin (par exemple [AT VI, 394], et plus généralement dans tout le Traité) : si essentielles qu'elles nous paraissent aujourd'hui, elles ne sont pourtant pour Descartes que des outils comme sa méthode des coefficients indéterminés [AT VI, 418], ou sa Parabole, nécessaire pour résoudre le sixième degré par sa méthode (voir le Livre Troisième). Croire que cette dernière se résume à l'invention des axes de coordonnées, si extraordinaire qu'elle soit - et il le sait -, est donc une erreur grave ; c'est confondre le moyen et la fin. L'auteur, au moins dans ce passage initiatique, ne considère les coordonnées x et y fixant un point variable que comme deux longueurs privilégiées, *à partir desquelles il se fait fort de déterminer tous les autres éléments géométriques de la figure*. D'une certaine manière, on peut retrouver là un souci de classification, voire d'automatisation, nous ramenant au *Discours de la Méthode*, mais il n'y est pas fait explicitement allusion.

En ce qui concerne le problème de Pappus lui-même, dont l'examen minutieux peut être évité par un lecteur non spécialiste malgré son importance capitale dans l'élaboration de la révolution cartésienne, un moderne ferait évidemment plus court. Sans doute se dispenserait-il de reproduire, en tout cas *in extenso*, la traduction latine du texte grec original. Mais surtout il pourrait, par exemple, commencer par établir un lemme proche de ceci : étant donnés un repère Oxy, une droite Δ et un angle φ, la distance CC', séparant un point variable C de coordonnées x et y du point C' de Δ tel que CC' et cette droite fassent entre elles l'angle φ, s'exprime par la valeur absolue d'une expression du type $ax + by + c$, où a, b et c sont indépendants de la position du point mobile C. (Ce lemme n'est autre qu'une variante du théorème selon lequel l'équation d'une droite est un polynôme du premier degré en x et y). Dès lors il devient évident qu'un lieu de Pappus « à quatre droites » est une conique qui a une équation de la forme

$$(ax + by + c)(dx + ey + f) = \lambda\,(gx + hy + i)(jx + ky + l)$$

puisque c'est l'ensemble des points C tels que quatre distances du type CC' ci-dessus soient liées de façon que le produit des deux premières reste proportionnel à celui des deux autres. Cet exemple est celui sur lequel Descartes s'étend longuement (avant d'y revenir au Livre Second), dont la figure singulière est même exhibée en deux endroits [AT VI, 382 et 384], avant d'être reprise, et parfois même complétée, à cinq autres occasions [AT VI, 398, 400, 402, 404 et 406] !

Les lieux à $2n$ droites, et leurs variantes à $2n-1$ droites, sont reconnus de la même manière comme étant ce que l'on appelle aujourd'hui des courbes algébriques de degré n, définies par des équation de la forme $P(x, y) = 0$, où P est un polynôme de degré n (que, réciproquement, toute courbe de ce genre admette une définition à la Pappus est un problème difficile, dont la solution est négative, et que Descartes ne se pose pas). Ainsi notre géomètre et ses neveux disposent-ils, pour la première fois dans l'histoire, d'objets d'étude - et d'outils pour un algorithme fondamental de résolution des équations algébriques - aussi complexes qu'on le désire, ayant une définition « à l'ancienne » leur assurant un lien solide avec les maîtres de l'Antiquité qui, en dehors de quelques cas spéciaux inventés pour les besoins de la cause (courbes trisectrices par exemples) n'avaient dans leur besace qu'une famille assez courte, essentiellement limitée aux sections coniques. Le saut quantitatif et qualitatif est considérable, et l'auteur est visiblement fier de son travail, lorsqu'il annonce, pour finir, qu'il doit maintenant établir les propriétés des nouveaux êtres qu'il vient d'engendrer par sa découverte.

De la nature des lignes courbes

Le Livre Second, occupant presque la moitié de la longueur du Traité, est donc nécessairement consacré à la mise au point d'ingrédients introduits par le Livre Premier Livre et indispensables à la résolution graphique des équations : il s'agit bien entendu des courbes algébriques (selon le vocabulaire moderne), éventail d'une richesse inimaginable auparavant et désormais disponible.

Une réflexion sur ces courbes occupe toute la première partie du Livre Second : Descartes introduit d'abord une classification subtile basée sur leur nature même (géométrique, mécanique) ; puis il indique au passage l'importance d'instruments (compas de son invention) destinés à agrandir encore le stock admissible ; et enfin, toujours dans le même but, il explicite sa *Transformation*, qui va jouer un rôle crucial en engendrant la Parabole cartésienne et ses suivantes. Il peut alors reprendre le problème de Pappus, donnant pour la première fois une étude de courbes à partir de leurs équations (les coniques vues à partir du problème à quatre droites). Il y traite donc en détail de courbes, ou bien toutes nouvelles (à savoir sa *Parabole* et ses *Ovales*), ou bien très anciennes mais sur lesquelles il apporte du nouveau sensationnel (la *Conchoïde de Nicomède*), dont il coupera, en silence, le cordon ombilical d'avec les lieux « à $2n$ droites » : petite faiblesse bien excusable, lorsque l'on réfléchit à la difficulté de ramener une Ovale à un complexe de huit droites, même avec tout l'arsenal des mathématiques d'aujourd'hui ... Quant à la transformation de Descartes [AT VI, 393], qu'il essaie d'abord sur une droite pour retrouver une propriété connue de l'Hyperbole, *reconnue à partir de son équation* [AT VI, 394], et qui lui servira de matrice pour engendrer sa Parabole en prenant bien soin d'indiquer qu'il ne fait qu'utiliser une variante d'une méthode ayant servi à définir la Conchoïde [AT VI, 395], elle n'est pas explicitement montrée comme une nouveauté directement issue de sa géométrie analytique, mais il ne fait aucun doute qu'elle n'aurait pas pu être conçue en dehors de ce cadre. Le rattachement à la tradition n'est ici que l'effet d'une fausse modestie, peut-être destinée à mieux faire accepter un concept dont l'originalité profonde pourrait sans cela rester incomprise.

Dans toute cette partie, nous trouvons une débauche de calculs, qu'il s'agisse d'analyser les capacités d'un compas qu'il a inventé [AT VI, 391-2] ou d'établir l'équation d'une Hyperbole euclidienne et de sa propre Parabole cartésienne [AT VI, 393-5], où ils ne sont en fait que suggérés, ou qu'il s'agisse de la longue reprise du problème de Pappus [AT VI, 397-406] dont la complexité est telle que le recours explicite aux équations est devenu indispensable. Cette dernière étude, justement, qui n'est autre (en termes modernes) que l'exposé d'un traitement systématique d'un polynôme du second degré jusqu'à aboutir à l'une des formes réduites caractérisant les trois types de coniques (quatre si l'on place le cercle à part), est un modèle de géométrie analytique, et ne diffère pas fondamentalement des démonstrations modernes (car cette question est toujours à l'ordre du jour). Une telle dissection technique, brillante en dépit de sa longueur inévitable, est présentée brutalement, sans autre justification que son succès final. Profondément et nécessairement originale, elle est évidemment sans précurseur à cette époque. Certes, son intérêt pour l'algorithme fondamental n'est pas évident, mais il était indispensable pour Descartes de montrer que sa géométrie était capable de justifier une affirmation sans preuve donnée par un ancien illustre ; par ailleurs, on peut accepter sa présence dans *La Géométrie* comme celle d'un exercice de style, destiné à montrer comment fonctionnait le nouvel outil, si éloigné des concepts des mathématiques anciennes qu'il devait en désarçonner plus d'un. Vient ensuite l'étude d'un lieu de Pappus à cinq droites (donc une cubique), dont le lien étroit avec la Parabole cartésienne est mis également en évidence par un calcul d'équations, ici reconnues comme identiques [AT VI, 408-10] : c'est la première fois que deux objets géométriques, issus de définitions différentes, sont identifiés l'un à l'autre par un tel procédé. La présence de cette cubique en cet endroit s'explique par le fait qu'elle constituera le *deus ex machina* indispensable à la résolution graphique des équations du sixième degré ; on en verra même une troisième définition dans le Livre suivant [AT VI, 479-80], qui prouve le soin extrême que Descartes a pris pour établir les propriétés de sa courbe fétiche.

Retournant pour un instant aux considérations générales, Descartes s'explique sur sa mise à l'écart de courbes comme la Spirale [AT VI, 411], et met au centre de son étude l'idée [AT VI, 412] que toute courbe est entièrement déterminée par le *rapport* entre ses points et leurs abscisses x (on pourrait même dire qu'elle est toute entière « contenue » dans son équation, - concept évidemment sans signification pour la Spirale -). Il justifiera ensuite cette proposition par toute la longue deuxième et dernière partie du Second Livre, avec notamment la construction des normales dont nous avons déjà parlé. *Stricto sensu* disjointe de la démarche générale du Traité, cette fameuse digression n'en constitue pas moins l'un de ses joyaux incontestables (également brillant exercice d'application de la puissance de la géométrie cartésienne). Chacun connaît aujourd'hui une définition élémentaire de ce qu'est une tangente à une courbe, par un processus de limite du support d'une corde pivotant autour du point considéré. Cette présentation, qui a triomphé peu après la publication de *La Géométrie*, est plus ou moins inspirée d'une technique développée à la même époque par Pierre Fermat et appelée « *De Maximis et Minimis* », titre donné par Fermat lui-même en Juin 1638 [*Œuvres* de Fermat, II, p. 154] mais alors non encore publiée. Elle ne sera jamais acceptée par Descartes, même sous la forme spéciale que Fermat lui communiquait justement dans cette lettre, au cours d'une polémique restée célèbre (voir par exemple AT II, 272, l.8, 320, l.5 *etc*). Sa propre idée de construction des tangentes est totalement différente. Même si elle a vite disparu pour des raisons d'incommodité, son influence sur les mathématiques sera très profonde, car elle repose sur une idée fondamentale sans laquelle la toujours très vivante géométrie algébrique, grâce à laquelle par exemple le Grand Théorème de Fermat a été démontré, ne serait qu'une coquille vide : c'est Descartes qui a introduit un concept de tangente qui s'étend aussitôt à toute courbe, même définie sur un corps sans topologie.

La première remarque est que la méthode qui nous est dévoilée ici concerne les *normales*, c'est-à-dire les perpendiculaires aux tangentes, et non les tangentes elles-mêmes : cette apparente bizarrerie s'explique naturellement par le fait que Descartes avait recherché pendant longtemps la solution d'un problème d'optique mettant en œuvre les normales à certaines surfaces, et surtout par le recours à un cercle auxiliaire qui sera justifié un peu plus loin. Cela dit, la présentation de la technique cartésienne, issue de son invention de la géométrie analytique, est assez simple : pour déterminer la normale en un point C d'une courbe connue par son équation, il suffit d'examiner la famille des cercles passant par ce point et centrés sur l'axe des ordonnées, une droite horizontale sur la figure [AT VI, 414] et non une verticale comme c'est aujourd'hui l'usage. Lorsque le centre P d'un tel cercle appartient à la normale cherchée, c'est que l'équation $f(y) = 0$ qui donne les ordonnées des points communs au cercle et à la courbe, évidemment vérifiée par l'ordonnée e du point C, admet en fait ce nombre e comme une *racine double* : alors le cercle et la courbe ont, en C, même tangente qui est la perpendiculaire au rayon PC. De manière précise, notant v l'ordonnée de P et s la longueur du rayon, l'équation $f(y) = 0$ a été obtenue en remplaçant systématiquement l'abscisse x par $\sqrt{s^2 - (v - y)^2}$ (et aussi, bien que Descartes ne le dise pas, par l'expression conjuguée $-\sqrt{s^2 - (v - y)^2}$), et il ne reste plus qu'à chercher à quelle condition portant sur l'ordonnée inconnue v de P le polynôme $(y - e)^2 = y^2 - 2ey + e^2$ divise le polynôme $f(y)$. Une justification assez rigoureuse de l'efficacité de cette technique est donnée à l'aide de considérations de nature topologique [AT VI, 418] où l'on voit deux racines inégales (dont l'une est naturellement e) devenir *entièrement égales* lorsque le cercle est celui qui est recherché. La méthode est particulièrement efficace lorsque l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la courbe, puisque x ne figure dans son équation $P(x, y) = 0$ que par son carré, ce qui rend immédiat le calcul de $f(y)$ (alors égal à $P(\sqrt{s^2 - (v - y)^2}, y)$ au lieu de $P(\sqrt{s^2 - (v - y)^2}, y)\, P(-\sqrt{s^2 - (v - y)^2}, y)$ dans le cas général) et assez praticable la détermination de P, mais ce n'est pas indispensable puisqu'il nous est présenté au moins un exemple - celui de sa Parabole du troisième degré - pour lequel cette simplification est impossible.

Après l'exposé théorique de la méthode, d'abord donnée sans justification [AT VI, 414], Descartes exhibe de nombreux exemples d'obtention de normales (et donc de tangentes) à un certain nombre de courbes. Assez curieusement, il ne les examine pas à fond l'une après l'autre, comme dans un livre moderne, mais travaille en deux temps : il commence d'abord par établir les équations générales et à préparer le travail d'intersection avec un cercle variable, en prenant dans l'ordre l'Ellipse, la Parabole cartésienne et, surtout, l'Ovale qui porte également son nom [AT VI, 416]. Notons dans ce cas une particularité remarquable spécifique : ici le rôle des deux coordonnées est assigné à d'autres longueurs qui les remplacent, à savoir les distances à deux points fixes appelés foyers (*points brûlants*) de l'Ovale ; cela étant, abscisse et ordonnée ne sont pas tout à fait absentes du calcul, mais sont rapidement éliminées tour à tour avec une facilité tenant à la nature des choses, qui s'arrangent d'elles-mêmes de façon déconcertante : Descartes a eu ici beaucoup de chance. Ce n'est qu'après toutes ces mises en scène qu'il consent à justifier tout le processus dans un paragraphe brillant [AT VI, 417-8] où, comme nous l'avons signalé plus haut, l'on frôle sans avoir l'air d'y toucher une intuition sous-jacente de ce qu'est un processus de limite (*si ce point* [...] *est tant soit peu plus proche, ou plus éloigné* [...] *qu'il ne doit*), et enfin à passer aux déterminations effectives pour les trois types de courbes envisagées plus haut, ce qui ne va pas sans demander quelque effort, d'abord à l'auteur mais aussi à ses lecteurs !

Il ajoutera d'ailleurs aussitôt, ce qui n'est pas sans faire un peu désordre, une quatrième détermination de normale, à savoir pour la *Conchoïde de Nicomède*, courbe du quatrième degré utilisée par les anciens pour la trisection de l'angle [AT VI, 423-4]. Contrairement aux autres exemples, nous n'avons pas droit ici à une préparation minutieuse suivie des détails des calculs, mais à une simple construction géométrique d'une élégance à couper le souffle. L'absence de toute justification technique (et une erreur d'inattention, consistant à échanger le rôle de x et de y) font que ce passage très court a toujours frappé l'attention des lecteurs aguerris. On peut voir à ce sujet par exemple une note de Paul Tannery placée *in fine* du Second Livre [AT VI, 441], où il parle d'une « *remarquable divination* » de l'historien danois H.G. Zeuthen selon laquelle la construction serait en fait issue d'un argument cinématique que Descartes ne pouvait décemment placer dans un ouvrage d'où les infiniment petits avaient été bannis ; notre propre note 80 propose une autre solution, heureusement plus conforme à l'esprit du Traité, et qui sauve le philosophe d'une accusation de dissimulation injustifiée.

Enfin cette partie se termine, trop longuement à nos yeux sans doute, par une bien lourde application au problème fondamental qu'il avait évoqué sans preuve dans *La Dioptrique* : la construction des normales à une Ovale cartésienne, naturellement issu de la loi de réfraction qu'il avait lui-même trouvée. Rares, avouons-le, sont ceux qui ont eu le courage de lire avec toute l'attention nécessaire cette justification de son travail d'optique, qu'il nous faut cependant regarder avec respect, puisqu'il a dû coûter une peine incroyable à Descartes. C'est d'ailleurs une énigme restée entière que de démêler les tentatives infructueuses et les intuitions qui ont pu le guider vers une solution aussi miraculeuse de cette très difficile question. À ce sujet, les maigres indices que l'on trouve dans les *Excerpta* ne sont pas d'un réel secours. Une analyse malheureusement un peu trop succincte de Paul Tannery [AT X 325-8] peut apporter quelques lumières sur la lecture de ces pages touffues. (Seule la publication ultérieure d'un ouvrage spécialement consacré à la théorie de ces courbes mal connues et complexes pourrait permettre aux lecteurs d'entrer plus aisément dans cette longue digression qui couvre une étendue égale à celle du Livre Premier tout entier, mais dont la postérité n'a guère retenu à juste titre que l'aspect de prouesse mathématique, et non les résultats euxmêmes). Qu'il suffise au lecteur pressé, ou non spécialiste, de savoir que la rigueur de cette fin de Livre est égale à celle du reste du Traité, et que Descartes avait bien gagné son pari, mais au prix de subtilités techniques sans grand intérêt intrinsèque. Les nombreuses illustrations qu'elle comporte, parfois maladroites et toujours délicates à interpréter, donnent une bonne image de la complexité du sujet.

Les toutes dernières lignes du Livre Second sont le seul témoignage de ce que Descartes avait bien vu que sa méthode des coordonnées pouvait s'appliquer à l'espace et non seulement au plan. Mais elles comportent une bévue de taille : les projections horizontale et verticale de la normale à une courbe gauche n'ont aucune raison d'être les normales de ses projections. Cette erreur célèbre jette malheureusement un doute sur la pertinence des intuitions de l'auteur sur une géométrie cartésienne à trois dimensions, mais elle résulte certainement d'une écriture trop rapide dont a visiblement souffert *La Géométrie*, pour des raisons que nous ignorons. Quoi qu'il en soit, avec ses erreurs et ses scories, ce Livre est certainement une pièce maîtresse des mathématiques de tous les temps, en particulier parce qu'il contient la première méthode jamais publiée de construction des tangentes à une courbe. Même si Fermat possédait la sienne à la même époque, plus simple et plus efficace, il ne la portera à la connaissance de tous que plus tard, et sous une forme toujours assez énigmatique, tranchant avec la clarté de Descartes, même si ce dernier avait fait un choix moins heureux. *De la nature des lignes courbes* contient les plus belles preuves de ce que son auteur était un mathématicien d'une originalité et d'une habileté remarquables, et qu'il a sa place indiscutable parmi la demi-douzaine de génies qui ont fait du dix-septième siècle le point de départ d'un renouveau scientifique qui ne s'est pas arrêté depuis.

De la construction des problèmes qui sont solides, ou plus que solides

Après ces longues mais riches digressions, le Livre Troisième peut enfin passer à l'essentiel du programme central cartésien : résoudre les équations de degré trois et quatre, puis cinq et six, voire les suivantes (évoquées à l'ultime page) dont la complexité *monte peu à peu, comme par degrés*, chaque Parabole en engendrant à son tour une autre, *d'un degré plus composée*, et ainsi *à l'infini* [AT VI, 18 et 485]. Cette progression jusqu'au chef d'œuvre final est orchestrée en trois temps : une introduction aux manipulations élémentaires sur les polynômes (avec de nombreuses innovations qui feront date), une reprise des solutions de Cardan et Ferrari au siècle précédent revisitées dans l'esprit de résolutions graphiques par intersections d'un cercle et d'une parabole ordinaire bien choisis - nouvelle par l'esprit à partir de formules dont il n'est pas l'inventeur -, et enfin leur extension totalement inédite aux équations suivantes à l'aide de Paraboles cartésiennes, inventées pour la circonstance. À l'exception du dernier paragraphe, où une récurrence qui n'est d'ailleurs qu'évoquée sans approfondissements est malheureusement fort imprudente, et même à strictement parler fausse, tout est techniquement parfait. Si ce Livre n'a pas, pour nous, le même poids que le Second dont la postérité est évidente, il n'en reste pas moins qu'il prouve tout autant l'audace, l'esprit de pionnier et les qualités de virtuose du calcul qui caractérisent notre philosophe mathématisant. Signalons que son titre, obscur pour un lecteur moderne, fait simplement référence à des constructions qui ne peuvent être menées qu'à condition de disposer de courbes respectivement de degré deux (« solides ») ou strictement supérieur (« plus que solides »), parmi lesquelles celles de degré trois (« sursolides », comme la Parabole cartésienne) figurent évidemment en bonne place.

En premier lieu, près de vingt pages sont consacrées à des considérations fort pertinentes sur ce qu'est une équation algébrique. Contrairement à d'autres passages plus complexes du Traité, leur lecture est aisée pour qui a quelque habitude du calcul littéral enseigné dans les écoles, et il serait sans grand intérêt d'en disséquer ici chacun des paragraphes : les notes qui leur sont associées suffiront. Certains des calculs qui sont jetés un peu comme par hasard et sans introduction particulière sont en fait, comme le montrera la suite, utiles pour telle ou telle question que l'on rencontrera ultérieurement. Seules sont peut-être plus déroutantes l'introduction elle-même, où nous retrouvons un compas cartésien qui rend automatique la détermination de moyennes proportionnelles mais dont la compréhension ne demande qu'un effort assez modeste [AT VI, 443], et la résolution qui semble bien banale d'un problème également dû à Pappus (sans rapport avec celui que nous connaissons déjà), qui est un exemple où une équation *a priori* complexe peut néanmoins être résolue par racines carrées si l'on sait s'y prendre [AT VI, 462]. Bien que cela ne puisse être sensible en première lecture à qui ne se donne pas la peine d'essayer de relever par lui-même le défi géométrique qui y est posé, ces deux paragraphes anodins sont en fait, une fois encore, le prétexte pour Descartes à prouver sa virtuosité, toujours en se mettant à l'abri de la critique par le choix d'une question classique dont, à la différence du premier problème, la solution figurait dans Pappus. Quelques lignes de calcul au hasard montreront vite combien son traitement par la géométrie analytique est beaucoup moins simple et naturel qu'il n'y paraît. Peut-être était-ce là l'occasion de montrer que ces mathématiques qu'il se flattait d'avoir domptées étaient en fait, même après son intervention, un monde bien ardu, ce qui ne rendait pas moins grande sa prouesse d'en être devenu le dernier Grand Maître.

Après les hors-d'œuvre, plus utiles que ne l'indique une première lecture, vient une solution des équations de degrés trois et quatre par intersection d'une parabole et d'un cercle (deux coniques ayant bien en général quatre points communs). Le premier type se ramène au second en ajoutant une racine supplémentaire (par exemple 0), ce qui élève artificiellement le degré d'une unité. La lecture de cette seconde étape, nécessairement crayon en main, est tout à fait possible, et il est indispensable de s'y livrer si l'on veut pouvoir ensuite passer aux degrés cinq et six. Elle ne présente pas de grandes difficultés, si elle demande évidemment de l'attention. La rédaction est, ici encore, en deux temps : d'abord la description de l'algorithme, suivie de sa justification (*Et la démonstration en est fort aisée* … [AT VI, 467]) par vérification pure et dure qu'une certaine expression était bien nulle comme il le fallait. Cette façon de faire est assez moderne, mais certains la jugeront bien peu pédagogique ; il est vrai que son auteur ne cherchait pas à passer pour un bon professeur dévoilant quelques-uns de ses trucs de magicien, mais ne répugnait sans doute pas à apparaître comme possédant une science supérieure qu'il suffisait de recevoir ! Ce qui est sans doute le plus notable dans toute cette partie intermédiaire et préparatoire à l'assaut final, ce sont les remarques, *a priori* anodines, selon laquelle la recherche de moyennes proportionnelles - essentiellement le vieux défi de duplication du cube - et la trisection de l'angle sont solubles par sa méthode [AT VI, 469-70], suivies, par une interprétation profonde des formules de résolution explicite par radicaux, de l'affirmation selon laquelle tout problème du troisième degré peut se ramener à l'un de ces deux cas particuliers [AT VI, 471]. À remarquer en particulier la façon très subtile dont Descartes traite la trisection : sa technique consiste au fond à démontrer une formule trigonométrique (celle qui donne le sinus d'un angle triple d'un autre), mais en recourant à de bons vieux triangles semblables : pour un moderne, le dépaysement est total.

Avant de passer au bouquet final, l'auteur s'offre une pause pour faire transition [AT VI, 475-6] pendant laquelle il justifie la nécessité qu'il y a à ses yeux de n'employer, pour résoudre un problème - c'est-à-dire trouver graphiquement les racines de quelque équation -, que des courbes de degré le plus simple possible. C'est peut-être aussi pour nous le lieu de formuler une hypothèse sur l'origine de la méthode de construction des normales du Second Livre. Lors des manipulations préparatoires qu'il a multipliées en coupant une parabole par un cercle, Descartes n'a certainement pas manqué de tomber sur un exemple au moins où il y a une racine double ; nous devons même supposer, bien qu'il n'y en ait pas d'exemple précis dans *La Géométrie*, qu'il a certainement dû rechercher systématiquement ce qui se passait lors d'un tel cas particulier dont l'importance n'avait pu échapper à ses yeux. Or le fait que cercle et parabole soient alors tangents est parfaitement évident si la figure tracée est tant soit peu fidèle. Inversement, cette constatation lui a permis, pensons-nous, de vérifier sur l'exemple que la tangente à la parabole était bien ce que l'on savait qu'elle était depuis les Anciens. De là à en déduire une méthode générale, il n'y avait qu'un pas, et l'on comprend mieux pourquoi c'est un '*cercle* variable qu'il a fait pivoter autour du point considéré et non, comme Fermat et les modernes, une *droite*. Même si on peut le regretter aujourd'hui, c'est certainement une observation de ce genre qui l'a conduit à la conception de son algorithme secondaire qui, se trouvant ainsi rattaché à l'algorithme fondamental, méritait donc parfaitement de trouver sa place dans *La Géométrie*. (Cette remarque ne pouvait être proposée lors de l'étude des normales au Livre précédent, puisqu'elle demande d'avoir déjà quelque idée de la méthode générale de résolution graphique des équations à l'aide de cercles et de courbes auxiliaires ; à la lumière du contenu du Livre Troisième, elle devient compréhensible et, espérons-nous, presque évidente en apportant une preuve supplémentaire de la profonde homogénéité d'un Traité qui, jusqu'ici, avait plutôt mauvaise réputation sur ce point.)

Le sommet est évidemment atteint lorsque Descartes, pour la première fois dans l'histoire, offre une résolution des équations de degré six (et donc également de celles de degré cinq, par ajout d'une racine artificielle). Cette fois-ci, la mathématique de son temps ne fournissait pas de formules donnant les racines à l'aide de radicaux (et nous savons depuis que ce n'était pas par manque de chance ou d'opiniâtreté, mais parce que de telles formules ne peuvent exister). Là résidait donc un défi de taille, et qui a été effectivement relevé et rigoureusement réglé à sa manière par Descartes, qui a montré ainsi toute la puissance de sa créativité et la subtilité de ses interventions calculatoires. Le tout est présenté en moins de trois pages [AT VI, 477-9], avec par surcroît une nouvelle et curieuse construction point par point de la Parabole cartésienne [AT VI, 479-80]. Comme pour les degrés immédiatement inférieurs, *la démonstration de tout ceci est assez facile* [AT VI, 480], et elle suit immédiatement l'exposé de la méthode. Il est sans grand intérêt de décrire cette dernière, en détail, dans cette introduction : elle se lit sans problèmes majeurs, surtout si l'on fait l'effort de patiemment déchiffrer la figure fondamentale [AT VI, 477 et 481], emblématique du Traité tout entier, mais rarement discutée et interprétée comme elle devrait l'être.

Enfin, à la toute dernière page, Descartes livre *in extremis* (mais sous une forme plus qu'évasive) ce qu'il croit être la clef des constructions réglant le cas des degrés supérieurs. Nous savons aujourd'hui de manière indiscutable que cette récurrence non prouvée est fausse, et que la mécanique si brillante qui avait bien fonctionné jusqu'au degré six est inopérante dès l'étape qui devrait la suivre immédiatement. Si donc l'algorithme fondamental voit ainsi brutalement amputé son domaine de validité, un lecteur d'aujourd'hui - pour qui le problème de résolution des équations a pris d'autres couleurs évidemment incompatibles avec les valeurs d'un homme du dix-septième siècle - s'en console facilement. Ce qui en subsistera à jamais, c'est que la méthode inventée pour qu'une technique de ce genre puisse se mettre en place a eu de telles autres retombées qu'elle suffit pour mettre Descartes en première ligne des novateurs dans une science où, en dépit des efforts d'un Viète par exemple, l'on avait désespérément besoin de créativité. Même si l'explosion, trente ans plus tard, du Calcul Différentiel et Intégral dont il n'avait pas pressenti l'arrivée rejettera dans l'oubli les deux subtils algorithmes dont *La Géométrie* est porteuse, il n'en reste pas moins que l'histoire de la pensée newtonienne aurait été différente sans ce livre qui a joué un rôle essentiel dans sa génèse (même si l'œuvre de Fermat, plus génial et plus profond, fut peut-être davantage proche par l'esprit de ce qui deviendra le *Calculus*). Bien qu'il n'ait été dans le domaine mathématique qu'un créateur exactement situé entre le dernier des classiques et le premier des modernes, le Descartes des *Essais* du *Discours de la Méthode* a néanmoins bien mérité, même par cette seule œuvre, la place privilégiée qu'il occupe encore aujourd'hui dans le Grand Amphithéatre de la Sorbonne : celle d'un observateur aigu et d'un grand acteur d'une Renaissance scientifique sans pareille, dont il fut en définitive le précurseur, le parrain et le prophète exigeant.

Perles et failles de LA GÉOMÉTRIE

La première gemme est évidemment, à la lumière de ce que nous savons aujourd'hui, l'invention de la géométrie analytique, dont les fondements ont été jetés incidemment dans le Livre Premier et pleinement utilisée dans tout le Traité comme outil qui lui donne des courbes de degré aussi élevé que possible, et moyen de résoudre toute équation algébrique par intersection de cercles et de certaines de ces courbes. Il y en a bien d'autres : une liberté toute nouvelle quant à la notion de « dimension » d'un coefficient d'une équation grâce au choix préalable d'une unité de longueur de mesure 1 [AT VI, 371], puisqu'il est alors inutile d'homogénéiser mécaniquement tous les monomes d'un polynôme ; c'est une véritable révolution : l'utilisation des nombres en géométrie n'est plus maintenant limitée sévèrement aux longueurs, aires ou volumes, mais elle s'est dégagée de son carcan originel et il sera par exemple possible de travailler désormais avec des puissances strictement supérieures à la troisième, ce qui était évidemment indispensable pour la mise en œuvre de l'algorithme fondamental ; l'application de la méthode (découlant de l'analyse platonicienne) consistant à partir d'une figure *a priori* où *tout est à nommer*, suivie d'un « démêlage » du connu et de l'inconnu, peu à peu dévoilé [AT VI, 372], et qui renvoie en un certain sens au *Discours* et à la systématisation du travail scientifique jusqu'alors trop attaché à la seule intuition désordonnée ; la classification des polynômes par la première ébauche de la notion de degré [AT VI, 381, 386, 392 et 485 par exemple], elle aussi facile à rattacher au troisième précepte, sinon même au quatrième ; la maîtrise des subtiles obligations qu'il s'impose lui-même pour qu'une courbe puisse être « reçue » [AT VI, 388] (être constructible point par point ne suffit pas, même si c'est suffisamment commode pour la pratique usuelle - voir ce qu'il fait pour sa parabole -) ; la notion toute neuve de courbe algébrique à la brillante descendance contemporaine, concept profond et d'une originalité étonnante [AT VI, 388-9] ; une intuition juste sur l'étendue de l'ensemble des courbes décrites à l'aide de machines, dont les compas dont il est l'inventeur, qu'il identifie - évidemment sans preuve - à celui des courbes algébriques (il faudra attendre deux cent cinquante ans pour que l'Allemand Kempe légitime ce résultat, intéressant mais un peu anecdotique) [AT VI 391] ; la notion de transformation géométrique (par le biais d'un exemple original : la transformation de Descartes), dont l'extraordinaire fécondité a considérablement enrichi l'étude de la géométrie classique et a eu d'importantes retombées dans un domaine *a priori* bien éloigné, l'Analyse classique [AT VI, 392] ;

la maîtrise du maniement de symboles nouveaux, tout particulièrement le système de notation cartésienne toujours en vigueur, distinguant paramètres et variables (par exemple suivant leur position dans l'alphabet). Son influence fut considérable, ne serait-ce que parce que cela a ouvert un champ renouvelé immense à l'intuition : pourquoi ce qui s'exprime simplement ne serait-il pas simple [AT VI, 394] ?

Il y a aussi une toute nouvelle façon, globale, de voir les plus vieilles et les plus sacrées de toutes les courbes : les coniques, ainsi rassemblées dans une même famille à la définition la plus simple qui soit (courbes admettant des équations du second degré), comme l'avaient pressenti Pappus et quelques autres précurseurs [AT VI, 396] ; l'idée qu'une courbe est toute entière contenue dans son équation, d'où l'on peut extraire à volonté toutes les propriétés, qui explique l'extraordinaire succès de la géométrie analytique, toujours valable au vingt-et-unième siècle [AT VI, 412-3] ; la notion de racine multiple, et son lien avec les tangentes (indispensable encore aujourd'hui pour la géométrie algébrique), qui établit un lien fort, et inattendu, entre géométrie et analyse [AT VI, 418] ; la très puissante méthode des coefficients indéterminés (illustration directe de l'idée de nommer aussi bien le connu que l'inconnu, avant que de « démêler »), devenu un outil de base pour bien des calculs, et aux retombées innombrables [AT VI, 419] ; la notion générale et une technique de mise en œuvre du concept tout nouveau d'élimination d'une variable entre deux équations [AT VI, 420] ; l'écriture systématique d'une équation sous la forme $f(x) = 0$ et non plus $g(x) = h(x)$, qui permettait d'éviter les coefficients négatifs [AT VI, 444] ; l'intuition (juste) de ce qu'une équation de degré n possède n racines (complexes), qui ne sera enfin justifiée qu'à l'extrême fin du dix-huitième siècle par Gauss démontrant un énoncé précis dû à d'Alembert après Girard, mais qui pourrait aussi porter le nom de Descartes, même si ce dernier se garde bien d'en parler autrement que par allusion [AT VI, 444] ; une condition nécessaire et suffisante pour que a soit racine de P, à savoir : $(x - a)$ divise $P(x)$, résultat déjà connu bien avant lui, mais dont il tirera d'intéressantes conséquences [AT VI, 444-5] ; la règle dite *des signes*, portant son nom, aussi simple à exprimer que complexe à prouver, fournissant un indice précis quant au nombre de racines positives (« *vraies racines* ») d'une équation, basée sur une intuition qui nous reste obscure, et dont il ne possédait certainement pas de démonstration [AT VI, 446] ; une ébauche des relations entre racines et coefficients d'un polynôme, avec des vues pénétrantes (non prouvées, mais justes) sur des manipulations rendant par exemple positives toutes les racines, en l'occurence grâce à une simple translation qui joue un rôle important dans son algorithme fondamental [AT VI, 446] ; une ébauche de la notion de sous-anneau engendré par un élément extérieur (comme une racine carrée), concept dont la fécondité sera clairement mise en lumière par les algébristes du dix-neuvième siècle, par exemple Galois, Dedekind ou Kummer [AT VI, 453] ; la classification des racines selon leur type (signalons tout particulièrement l'emploi du mot « imaginaire »), toujours en relation avec les volontés normatives du *D*iscours de la Méthode [AT VI, 453] ; une habile technique de recherche de racines rationnelles d'équations à coefficients entiers, toujours en usage, rare témoignage (avec quelques textes de lettres) d'un certain interêt de Descartes pour l'Arithmétique où excellait Fermat [AT VI, 455] ; une méthode originale de résolution des équations du quatrième degré, reposant sur son idée de coefficients indéterminés et distincte de celle de Ferrari qui avait le premier emporté le bastion [AT p.457] ; et enfin l'évocation de très nombreux tours de force techniques : construction d'une normale à une Conchoïde [AT VI, 423] ou, surtout, à une Ovale [AT VI, 432], sans oublier la très remarquable détermination graphique des racines d'une équation du sixième degré, bien désuète pour nos yeux d'aujourd'hui mais qui n'en reste pas moins admirable par sa profonde originalité [AT VI, 477] *etc*, premier pas fondamental après la résolution du second degré par Euclide II (*application des aires*)) et celles des degrés trois et quatre par Cardan, Scipion Ferreus, Tartaglia et Ferrarri en 1545 dans le célèbre *Ars Magna*.

Parmi les échecs, il faut d'abord recenser certaines réussites qui n'ont pas survécu, dont la méthode de résolution graphique des équations, sans objet lorsque l'on dispose de moyens de calcul (logarithmique puis informatique, issus par exemple de la machine de Pascal qu'il avait vue le 24 septembre 1647) la rendant obsolète ; la Parabole de Descartes, retrouvée par Newton sous le nom de « Trident » ; la méthode de construction des normales, presque immédiatement remplacée par les techniques du Calcul Différentiel de la fin de siècle ; la description des coniques comme « lieux à quatre droites », les Ovales de Descartes, puisque la construction d'instruments d'optique « parfaits », illusoire à cause des très grandes difficultés technologiques de leur mise au point (et Descartes eut tout loisir de s'en apercevoir), laissera la place à des instruments certes imparfaits, mais intelligemment utilisés dans le cadre de l'« approximation de Gauss », qui donneront en pratique des résultats tout à fait satisfaisants.

À côté de ces disparitions, on doit regretter un certain nombre de scories entachant le Taité par de mauvaises initiatives ou même parfois par des inexactitudes flagrantes dont les suivantes, d'importances évidemment très différentes : la maladroite méthode de détermination des tangentes ; l'aveuglement devant l'arrivée de l'analyse, et donc par exemple le concept important de courbure en un point ; bien que Descartes reçoive les *racines négatives* comme étant des racines, il ne reconnaît pas de *coordonnées négatives*, ce qui introduit bien des complications inutiles ; enfin les figures qui émaillent le Traité sont très peu lisibles (ce qui va avec le fait regrettable que le texte lui-même est souvent assez rude à déchiffrer), comble pour un philosophe qui a mis les préceptes du *Discours de la Méthode* sous le signe d'une excellente visibilité !

À côté de ces faiblesses, ce qu'il faut bien appeler les erreurs de *La Géométrie* sont évidemment encore plus répréhensibles ; parmi elles, la plus importante a été de croire la mathématique achevée, parce que l'algèbre l'aurait été à la suite de son travail. Il n'a jamais imaginé l'arrivée impétueuse de l'analyse, même dans l'étude du problème de De Beaune dont il aurait pu tirer la notion de fonctions exponentielle et logarithmique ; la plus grave d'entre elles est la dernière [AT VI, 485], mais aussi malheureusement celle qui sous-tend tout le livre : la méthode de résolution graphique esquissée, parfaitement correcte jusqu'au degré six, ne fonctionne déjà plus pour l'étape suivante : on peut construire une équation du huitième degré dont aucune intersection d'un cercle et d'une Parabole de Descartes généralisée suivant les indications de la fin du Livre Troisième ne peut donner les racines.

On peut donc d'autant plus regretter que Descartes n'ait pas remarqué que la construction point par point d'une courbe d'équation $y = P(x)$ et l'idée de son intersection d'avec l'axe des abscisses $y = 0$ rendaient bien plus facile et générale la résolution graphique de $P(x) = 0$, « *le plus relevé et excellent de tous les autres problèmes* » (Viète), but ultime du Traité.

Cela dit, *La Géométrie* est ce qu'elle est, avec toutes ses facettes, brillantes et grises : une étape majeure, incomplète mais fulgurante de la Science, en mathématique mais aussi dans d'autres branches, qui s'apprêtait à entrer bientôt grâce à elle dans l'ère moderne.

Géométrie et Méthode

Cet Essai nous est explicitement présenté comme une mise en œuvre de la fameuse méthode cartésienne. Nous venons de voir en détail comment elle lui a permis, en obtenant une méthode universelle - du moins le croyait-il - de résoudre toutes les équations algébriques, de maîtriser la discipline mathématique ; mais son projet allait bien au delà, comme le montrent les citations qui suivent, derrière lesquelles nous devons nous effacer avec nos préjugés modernes. Commençons très tôt, le 6 mars 1619, lorsqu'il écrit à Beeckman (lettre II de AT X 156) : *Pour ne rien vous cacher de ce qui fait l'objet de mon travail, je voudrais donner u public, non pas un* Ars Brevis *comme Lulle, mais une science toute nouvelle, qui permette de résoudre en général toutes les questions qu'on peut se proposer en n'importe quel genre de quantité, continue ou discontinue, selon sa nature* [nous sommes ici onze ans avant les traductions de Viète ; il faut noter que les problèmes considérés sont seulement ceux qu'on peut exprimer en nombres]. Dans un certain nombre de Règles (que l'on trouvera respectivement dans le livre fondamental de Jean-Luc Marion, repéré ici par le sigle JLM, aux pages 2, 11 [deux fois], 54, 62 [deux fois], 81 et 7), il précise sa pensée qui date donc d'environ 1628 au plus tard :

Le but des études doit être de diriger l'esprit jusqu'à le rendre capable d'énoncer des jugements solides et vrais sur tout ce qui se présente à lui [I]

Parvenir à la connaissance de toutes choses [IV]

Ce que j'entends par méthode, ce sont des règles certaines et faciles, par l'observation exacte desquelles on sera sûr de ne jamais prendre une erreur pour une vérité et, sans y dépenser inutilement les forces de son esprit, mais en accroissant son savoir par un progrès continu, de parvenir à la connaissance vraie de tout on sera capable [id.]

Placés devant une question parfaitement comprise, nous devons l'abstraire de toute représentation superflue, la réduire à sa forme la plus simple, et la diviser en parties aussi petites que possible dont on fera l'énumération [XIII]

La majeure partie du travail humain ne consiste en rien d'autre qu'en une réduction de ces rapports, réduction destinée à faire apparaître avec clarté une égalité entre le terme cherché et quelque terme connu [XIV]

Rien ne peut se réduire à une telle égalité, sinon ce qui est susceptible de plus ou de moins, et que tout ce qui est tel est pris sous le nom de grandeur : à telle enseigne qu'une fois les termes d'une difficulté dégagés par abstraction de tout sujet, conformément à la règle précédente, nous comprenons par celle-

ci que nous n'avons plus affaire désormais qu'à des grandeurs en général [id.]

Par cette méthode de raisonnement, il faut chercher autant de grandeurs exprimées de deux manières différentes qu'il y aura de termes inconnus que nous aurons supposés connus, pour pouvoir parcourir la difficulté en ordre direct; car ainsi on obtiendra, en nombre égal, des comparaisons entre deux termes égaux [XIX]

Et il ne serait d'aucun profit de compter les voix, pour suivre l'opinon qui a le plus de répondants : car, lorsqu'il s'agit d'une question difficile, il est vraisemblable qu'il s'en soit trouvé peu, et non beaucoup, pour découvrir la vérité à son sujet [III]
(l'article du philosophe et mathématicien William Ralph Boyce Gibson (1869-1935), diplômé à Paris et au Queen's College d'Oxford, qui suit cette introduction revient longuement sur les liens profonds entre *Regulæ* et *Géométrie*).

En mars 1636, Descartes écrit à Mersenne (lettre LXVI, AT I 339) :

Le projet d'une Science Universelle qui puisse élever notre nature à son plus haut degré de perfection et (page suivante) *Enfin, en* La Géométrie, *je tâche à donner une façon générale pour soudre tous les problèmes qui ne l'ont encore jamais été.*

Il est donc maintenant temps de citer quelques extraits de *La Géométrie* elle-même et du *Discours de la Méthode* de 1637 qui éclairent bien ce projet cartésien et la voie qui le supporte ($o\delta o\varsigma$, en grec) :

Chercher la vraie méthode pour parvenir à la connaissance de toutes les choses dont mon esprit serait capable [Discours II, AT VI 17]

Toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes [Discours II, AT VI 19]

Il suffisait que je les expliquasse par quelques chiffres, les plus courts qu'il serait possible; et que, par ce moyen, j'emprunterais tout le meilleur de l'Analyse Géométrique et de l'Algèbre, et corrigerais tous les défauts de l'une par l'autre [Discours II, AT VI 20]

Être assuré de l'acquisition de toutes les connaissances dont je serai capable [Discours III, AT VI 28]

Nous rendre comme maîtres et possesseurs de la nature [Discours VI, AT VI 62].

Voici maintenant le texte capital :

Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer *comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes, qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues, qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues, et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelles sortes elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusques à ce que l'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une Équation ; car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles Équations, qu'on a supposé de lignes, qui étaient inconnues. Ou bien s'il ne s'en trouve pas tant, et que nonobstant on n'omette rien de ce qui est désiré en la question, cela témoigne qu'elle n'est pas entièrement déterminée. Et lors on peut prendre à discrétion des lignes connues, pour toutes les inconnues auxquelles ne correspond aucune Équation. Après cela s'il en reste encore plusieurs, il sa faut servir par ordre de chacune des Équations qui restent aussi, soit en la considérant toute seule, soit en la comparant, avec les autres, pour expliquer chacune de ces lignes inconnues ; et faire ainsi en les démèlant, qu'il n'en demeure qu'une seule, égale à quelque autre, qui soit connue, ou bien dont le carré, ou le cube, ou le carré de carré, ou le sursolide, ou le carré de cube* etc. *soit égale à ce, qui se produit par l'addition, ou soustraction de deus ou plusieurs autres quantités, dont l'une soit connue, et les autres soient composées de quelques moyennes proportionnelles entre l'unité, et ce carré, ou cube, ou carré de carré* etc. *multipliées par d'autres connues* [Géométrie III, AT VI 372],

C'est pourquoi je croirai faire en ceci tout le mieux qui se puisse, si je donne une règle générale [Géométrie III, AT VI 476].

En janvier 1638 (lettre XCIX, AT I 489), Descartes affirme à Mersenne que *sa façon de démontrer* [...] *est tirée d'une connaissance de la nature des équations, qui n'a jamais été, que je sache, assez expliquée ailleurs que dans le troisième livre de ma Géométrie* ; quelques mois plus tard (27 juillet, lettre CXXXI, AT II 268) il précise *Mais je n'ai résolu de quitter que la géométrie abstraite, c'est-à-dire la recherche des questions qui ne servent qu'à exercer l'esprit ; et ce afin d'avoir d'autant plus de loisir de cultiver une autre sorte de géométrie, qui se propose pour questions l'explication des phénomènes de la nature.*

Il reviendra à ces considérations dans les *Principia* en 1644 : dans la Préface (*Il n'est point besoin de chercher d'autres principes que ceux que j'ai* *donnés, pour parvenir à toutes les plus hautes connaissances dont l'esprit humain soit capable*), AT IXb 11, et aussi II 64 p. 102 avec ce texte explicite : *Car j'avoue franchement ici que je ne connais point d'autre matière des choses corporelles, que celle qui peut être divisée, figurée et mue en toutes sortes de façons, c'est-à-dire celle que les Géomètres nomment la quantité, et qu'ils prennent pour l'objet de leurs démonstrations ; et que je ne considère, en cette matière, que ses divisions, ses figures et ses mouvements ; et enfin que, touchant cela, je ne veux rien recevoir pour vrai, sinon ce qui en sera déduit avec tant d'évidence, qu'il pourra tenir lieu d'une démonstration Mathématique. Et parce qu'on peut rendre raison, en cette sorte, de tous les Phénomènes de la nature, comme on pourra juger par ce qui suit, je ne pense pas qu'on doive recevoir d'autres principes en la Physique, ni même qu'on ait raison d'en souhaiter d'autres, que ceux qui sont ici expliqués.*

Si *La Géométrie* ne permet pas de ramener, par exemple, le problème de l'existence de Dieu à la résolution d'une équation - en dépit de la présence obsédante du quantificateur universel **tout** dans ces citations trop ambitieuses -, cet Essai explicite parfaitement la méthode :

nommer, numériser, lister par degrés successifs les relations internes, établir des équations algébriques, les résoudre

mise en œuvre dans la discipline reine qu'est la mathématique, et ce tour de force doit lui apporter la gloire sinon la puissance. Il faut reconnaître là une réussite digne d'un grand créateur solitaire.

Notes

[1]Lettre au Père Mersenne (avril 1637), XCVII bis in AT I 478.

[2]Comparer la première page de la *Géométrie* (AT VI 369) « Et comme toute l'arithmétique... », avec la règle XVIII ; (AT VI 372) « Puis, sans considérer aucune différence... », avec les règles XVII et XIX ; (AT VI 374) « C'est pourquoi je me contenterai ici... », avec la règle XX.

[3]Règles pour la direction de l'esprit, JLM 53

[4]Règles, JLM 76.

[5]Lettre au Père Mersenne (mars 1936), LXVI in AT I 340.

[6]Règles, JLM 6.

[7]Règles, JLM 5.

[8]Règles, JLM 8.

[9]Règles, JLM 26.

[10]La Géométrie, AT VI 389.

[11]La Géométrie, AT VI 390.

[12]La Géométrie, AT VI 390.

[13]Règles, JLM 1.

[14]Règles, JLM 2.

[15]Règles, JLM 2.

[16]Règles, JLM 15.

[17]Règles, JLM 18.

[18]La Géométrie, AT VI 475, et Discours de la Méthode, AT VI 64.

[19]Règles, JLM 18.

[20]Règles, JLM 75.

[21]La Géométrie, AT VI 412.

[22]**La Géométrie, AT VI 476.**

[23]**La Géométrie, AT VI 397**

[24]**La Géométrie, AT VI 381.**

[25]**La Géométrie, AT VI 372 et 374.**

[26]**La Géométrie, AT VI 470.**

[27]**La Géométrie, AT VI 485.**

[28]**Lettre à un Révérend Père Jésuite (Octobre 1637), XCIII in AT I 458.**

[29]**Lettre au Révérend Père Mersenne (Avril 1637), XCVII bis in AT I 478.**