La radioactivité [1]

Un mathématicien, un physicien et un probabiliste aux prises avec la radioactivité

par **André WARUSFEL**
75004 Paris
awarus@club-internet.fr

RÉSUMÉ

Pourquoi un nombre entier de noyaux non encore désintégrés est-il bien représenté par une formule de la forme $N(t) = Ne^{-\lambda t}$ *qui a très peu de chances de donner des résultats entiers ?*

Ce conte moral se déroule dans une classe scientifique, au cours de l'année pendant laquelle sont introduites les notions de fonctions exponentielle et logarithme, la résolution des équations différentielles simples de la forme $y' = ay$ et une présentation de la radioactivité. Depuis les années 1970, ces concepts sont passés de la première année d'enseignement supérieur à la terminale scientifique. Les programmes auxquels il sera fait allusion sont ceux qui ont été mis en place à la rentrée 2002.

Il ne s'agit naturellement pas d'un modèle de cours destiné aux professeurs ou aux élèves de cette classe, mais d'un article de réflexion sur ce que pourrait être une collaboration interdisciplinaire qui voudrait connaître les acteurs réels sous-jacents à cette importante question, où physique expérimentale, mathématique (méthode d'Euler) et probabilités (loi binomiale) jouent des rôles remarquablement complémentaires.

Toute séquence d'enseignement jouée devant un public réel ne représente qu'une partie très limitée de l'effort que le professeur a exercé lors de sa préparation. Une réflexion en profondeur sur « ce qu'il y a derrière le rideau », souvent trop technique pour pouvoir apparaître aux yeux des élèves, semblerait donc n'avoir au premier abord aucun effet notable sur un discours forcément restreint (et présenterait tout au plus un intérêt culturel). Mais chacun sait bien que la maîtrise du dessous des cartes est la source fondamentale de la confiance en soi, et en ce qu'il transmet, de l'enseignant. Elle lui permet d'élaborer un discours pédagogique dont la force éclairante et persuasive résulte, de façon cachée, de la hauteur de vue acquise lors de la mise au point d'un cours reposant sur des bases scientifiques fortes, à nécessairement filtrer avant de passer à la séquence de cours.

(1) La première version de cette note est parue dans la *Revue de la filière mathématiques*, n° 1 de la 114e année de la RMS, comme document inaugural de la rubrique destinée à la classe de terminale S.
Cet article est publié en même temps dans la revue de l'APMEP, n° 455, décembre 2004.

1. LA DÉMARCHE TRADITIONNELLE

Au commencement, le mathématicien étudie devant les élèves le concept de dérivation, puis introduit les fonctions exponentielle et logarithme (par exemple en s'appuyant sur la propriété, admise, selon laquelle la fonction inverse admet une primitive sur l'ensemble des réels strictement positifs). Il en déduit que la fonction définie par $y(t) = b\,e^{at}$ est l'unique solution du problème différentiel

$$y' = ay, \quad y(0) = b.$$

Entre alors le physicien. Il se procure un compteur de désintégrations (opérant par exemple sur du radon 220) qui donne, à chaque instant t, l'activité radioactive de la source qui y est enfermée, c'est-à-dire (au signe près) le nombre $N(t) - N(t + \Delta t)$ de noyaux désintégrés pendant un assez petit laps de temps Δt qu'il fixe lui-même. À l'instant $t = 0$, l'échantillon considéré renferme $N = N(0)$ noyaux, nombre en principe inconnu.

Après dépouillement de quelques expériences, il énonce que le nombre moyen de noyaux subsistant au temps $t > 0$ vérifie une égalité approchée de la forme

$$N(t + \Delta t) - N(t) \approx - \lambda N(t)\Delta t.$$

où le nombre $\lambda > 0$, résultant de ses mesures, est indépendant du temps t et de l'intervalle de temps Δt. Cette égalité semble d'autant plus fiable que Δt est petit (voir l'annexe 1 pour les détails).

Modélisant mathématiquement cette situation par l'équation différentielle

$$\frac{d\,N(t)}{d\,t} = - \lambda N(t),$$

il en déduit aussitôt la loi de décroissance bien connue

$$N(t) = N\,e^{-\lambda t}.$$

Cette façon de faire, où les tâches sont bien distinctes, est claire, rapide et fort efficace. Elle rassure professeurs et élèves. Elle présente pourtant bien des inconvénients : outre le fait que l'interdisciplinarité n'y trouve guère son compte, elle passe trop rapidement sur un grand nombre d'approximations que la présence d'un probabiliste (en général, le mathématicien lui-même muni d'une autre casquette), provoquée par les réflexions du physicien, permettra de lever en accroissant grandement la compréhension du traitement mathématique trop abrupt du phénomène. En particulier, elle permettra non seulement de comprendre le rôle de $N\,e^{-\lambda t}$ comme valeur « moyenne » - et de préciser ce que cela signifie -, mais aussi de maîtriser l'étendue des fluctuations autour de cette valeur moyenne.

2. INVERSER LES RÔLES

Dans cette seconde séquence, c'est le physicien qui ouvre le jeu. Après avoir expérimenté puis introduit sa loi approchée, il décide de procéder par étapes en découpant la durée séparant l'instant zéro de l'instant t en un grand nombre n de « tops » ou « grains de temps » élémentaires, de durée $\Delta t = \dfrac{t}{n}$ assez petite pour que l'égalité approchée $\mathrm{N}(t+\Delta t) - \mathrm{N}(t) \approx -\lambda\,\mathrm{N}(t)\,\Delta t$ puisse être considérée comme suffisamment exacte pour lancer un calcul précis (on peut interpréter cela comme un changement de l'unité de temps, remplaçant la seconde traditionnelle par le top).

Il en déduit alors l'égalité $\mathrm{N}(\Delta t) \approx \mathrm{N}(0) - \lambda\,\mathrm{N}(0)\,\Delta t$, soit $\mathrm{N}(\Delta t) \approx \mathrm{N}\,p$ où p est une abréviation pour $1 - \lambda\,\Delta t$. Passant au top suivant, il obtient $\mathrm{N}(2\,\Delta t) \approx \left[\mathrm{N}(\Delta t)\right] p \approx \mathrm{N}\,p^2$ puis, par une récurrence évidente,

$$N(t) \approx \mathrm{N}(n\Delta t) \approx \mathrm{N}p^n \approx \mathrm{N}(1-\lambda\Delta t)^n \approx \mathrm{N}\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n.$$

Le mathématicien et lui reconnaissent dans cette formule une approximation bien connue de l'exponentielle, résultant d'ailleurs directement de la très classique méthode d'Euler de résolution du problème différentiel $\mathrm{N}' = -\lambda\,\mathrm{N}$ avec $\mathrm{N} = \mathrm{N}(0)$ comme valeur initiale.

Retrouver l'égalité $\mathrm{N}(t) + \mathrm{N}\,e^{-\lambda t}$ à partir de la précédente en faisant tendre n vers l'infini est un jeu d'enfant si la fonction logarithme est connue.

Mais les programmes de 2002 incitaient à suivre une autre voie, à savoir introduire au contraire exponentielle et logarithme à partir de cette approximation eulérienne. Ils n'ont malheureusement pas du tout été suivis, en tout cas si l'on se réfère aux ouvrages publiés à l'usage des lycéens. L'annexe 2 montre pourtant comment on pouvait le faire ; elle a été mise au point parallèlement à (et indépendamment de) la construction publiée juillet 2002 dans la partie commune des documents d'accompagnement pour les professeurs des disciplines scientifiques des terminales S (scérÉn [CNDP] éditeur) écrite par les trois GEPS (groupes d'experts chargés de la rédaction des programmes). On constatera que les deux démarches sont très voisines, même si l'on peut leur reprocher un caractère artificiel sans doute lié au sujet même.

On trouvera aussi, dans l'annexe 5, une présentation différente de cette question, classique, reposant sur une axiomatique très proche d'une démarche suggérée par les documents d'accompagnement, résultant évidemment de nombreuses expériences. Elle a l'avantage de bien mettre en valeur les propriétés mises en avant par le physicien dans sa tentative de description du phénomène.

Cette fois-ci, la collaboration entre mathématicien et physicien est plus satisfaisante et évoque davantage un montage « en parallèle » que le montage traditionnel « en série ». Conformément à ce qui s'est produit à plusieurs reprises dans l'histoire, l'outil théorique s'y met en place à la suite d'une demande issue de l'expérience, pour le plus grand profit des deux disciplines.

3. ENTRE LE PROBABILISTE

Bien entendu, personne n'est vraiment dupe : la fonction $\mathrm{N}(t)$ autour de laquelle tournent les paragraphes précédents n'existe tout simplement pas. Outre qu'il est impossible d'admettre qu'une fonction censée ne prendre que des valeurs entières puisse être solution d'une équation différentielle linéaire, il avait été dit - mais de façon fort discrète - qu'il ne s'agissait que d'un nombre « moyen » de noyaux non désintégrés à l'instant t.

La vérité est que $N(t)$ a bien un sens très précis lors de chaque expérience, mais que cette fonction n'a aucune raison de rester identique à elle-même et évolue avec l'expérience. Parler de « loi » à son égard est donc abusif (ce n'est d'ailleurs pas le seul cas où la physique travaille sur de telles notions : la thermodynamique est pleine de ces phénomènes partiellement indéterminés).

D'ailleurs, les bons cours de physique insistent eux-mêmes sur ce point : *la désintégration radioactive est un phénomène **aléatoire***, et l'on y interprète par exemple à juste titre l'égalité approchée de départ en disant que *la **probabilité** de désintégration d'un noyau dans un intervalle de temps donné est constante.*

Les gros mots sont lâchés. Il est donc nécessaire de soumettre à un probabiliste le soin de résoudre le problème suivant : comment, à partir d'un modèle aléatoire discret imaginé par le physicien à la suite de son expérience, exprimer de façon mathématiquement correcte, et justifier sur des bases rigoureuses, la vérité cachée sous la formule ambiguë $N(t) = N\,e^{-\lambda t}$?

4. CONSTRUCTION ET PREMIÈRE EXPLOITATION DU MODÈLE

Deux modélisations possibles viennent aussitôt à l'esprit (elles sont d'ailleurs heureusement équivalentes, au moins si p est rationnel). Plus précisément, il s'agit de discrétiser le phénomène physique en un autre, plus simple, dont la modélisation mathématique est plus facile. Dans la première, Zeus lance ensemble vers le ciel N dés trafiqués de façon que la probabilité de sortir en retombant sur terre autre chose qu'un 6 soit égale à $p = 1 - \lambda\,\Delta t$: il détruit alors les dés ayant sorti 6 et recommence, jusqu'à avoir effectué n lancers ou éliminé tous les dés. Dans la seconde, il fabrique N urnes identiques au départ et contenant des boules blanches et rouges dans les proportions p et $1 - p$: à chacun des n tirages simultanés d'une boule dans chaque urne non vide (s'il en reste), il vide les urnes dont vient de sortir une boule rouge, mais remet à sa place chaque boule blanche tirée.

Chacun de ces modèles est facile à traiter lorsque $n = 1$: on est en effet en face d'un problème classique de *distribution binomiale* $\mathsf{B}(N, p)$ de N essais simultanés indépendants avec une probabilité p de réussite et une probabilité $1 - p$ d'échec. La probabilité pour qu'il reste k dés (ou k urnes non vides) après le premier top est classiquement donnée par la formule

$$\mathsf{B}(N, p)(k) = \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k}.$$

Par contre, les cas $n > 1$ sont apparemment plus difficiles à traiter : il s'agit bien entendu toujours de distributions binomiales, mais dont les nombres d'essais N*, N**, etc. sont maintenant inconnus, car dépendant des résultats des pas précédents.

L'expression $N(t) = N(n\Delta t)$ peut maintenant recevoir son statut mathématique correct : le nombre $N(n\Delta t)$ de dés restant (d'urnes non vides) après n lancers (tirages) varie avec chaque expérience, et définit une *variable aléatoire*, notée ici X_n. Cette fonction X_n est à distinguer soigneusement de l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre - c'est-à-dire les différents $N(t)$ déterminés par chacune des expériences possibles -.

Que $N(t)$ ne soit pas une fonction est alors clair (même si le terme de variable aléatoire, imposé par la tradition, n'est pas très parlant, celui d'*aléa numérique* n'ayant pas pu s'imposer). Le problème est le suivant : peut-on déterminer la *loi de probabilité* de la variable X_n, et en particulier son espérance mathématique $E(X_n)$, valeur unique censée résumer au mieux les différentes valeurs 0, 1, 2, ..., N que X_n peut prendre ?

Dans un premier temps, nous ne donnerons pas la réponse, mais introduirons une argumentation heuristique, heureusement justifiée *a posteriori* (!) par son résultat. Puisque l'on ignore le nombre N^* de dés restant (d'urnes non vides) au premier top, on peut le remplacer faute de mieux par l'espérance mathématique de la distribution binomiale $B(N, p)$, à savoir $E(X_1) = Np$. La seconde étape peut donc être considérée, « en moyenne », comme une nouvelle distribution binomiale, à savoir $B(N^*, p)$, dont l'espérance est cette fois-ci N^*p, c'est-à-dire Np^2. Par récurrence, il semble donc bien que la valeur « moyenne » de X_n soit le nombre Np^n, c'est-à-dire encore l'expression $N\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n$ que nous retrouvons à notre très grande satisfaction. Mais il va sans dire que cette démarche est des plus boiteuses (n'y fait-on pas semblant de croire par exemple que tous les nombres Np^m sont entiers ?) ; il faut des soubassements autrement solides pour enfin comprendre ce que cache réellement la « loi » de décroissance rapide.

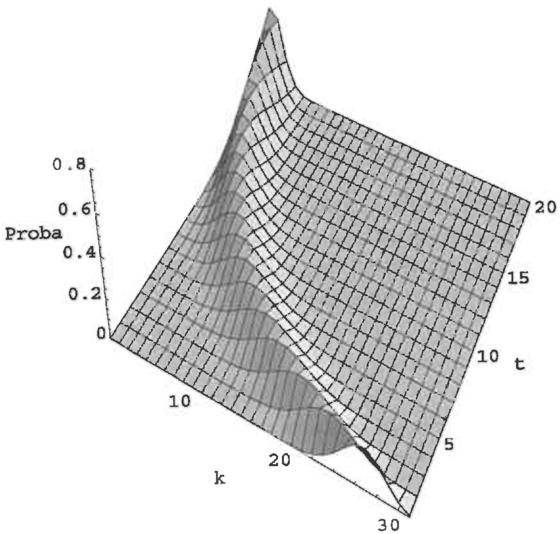
5. UN MIRACLE

Faute de mieux, on devrait en rester là si l'annexe 3 ne nous livrait la clef de l'affaire. En dépit de ce que l'on pourrait croire, la loi de probabilité de X_n, si embrouillée *a priori*, peut être déterminée ; elle est même très simple. Voici donc le *Deus ex machina* : **la variable aléatoire X_n suit aussi une loi binomiale**, plus précisément $B(N, p^n)$. L'on en déduit que son espérance mathématique $E(X_n)$ est égale à Np^n : cette fois-ci, nous savons en toute rigueur ce que signifie $N\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n$: c'est l'espérance de la variable aléatoire X_n, définie comme prenant pour valeurs les nombres $N(t) = N(n\Delta t)$ issus des diverses expériences possibles.

Cette étude nous apporte un plus très important : non seulement nous connaissons maintenant la valeur moyenne de X_n, mais même la probabilité de l'événement $X_n = k$, où le paramètre entier k varie de 0 à N. On a en effet :

$$\text{Prob}(X_n = k) = B(N, p^n)(k) = \binom{N}{k} p^{nk} (1 - p^n)^{N-k}.$$

Cela signifie que nous maîtrisons les fluctuations du nombre de noyaux restants à un instant donné autour de sa valeur moyenne $\mu = \mathrm{N}e^{-\lambda t}$ dont $\mathrm{N}\left(1 - \dfrac{\lambda t}{n}\right)^n$ est une bonne approximation. On peut ainsi répondre à des questions du genre : quelle est la probabilité qu'une expérience donne un N(t) supérieur à sa moyenne théorique μ de plus de $\dfrac{\mu}{100}$? etc. La seule loi de décroissance ne permet évidemment pas de résoudre ces demandes pourtant légitimes. La figure ci-dessous, construite grâce à Mathematica (*cf.* l'annexe 4), montre au tout premier plan la distribution binomiale ainsi définie pour $\mathrm{N} = 30$, $\lambda = \dfrac{1}{6}$, $n = 30$ et $t = 1$ (que les entiers N et n soient ridiculement petits par rapport à ce qu'ils devraient être est justifié par les possibilités limitées du logiciel et surtout de la lecture d'une figure par un œil humain). C'est une espèce de courbe en cloche dissymétrique. Suivent alors les distributions analogues pour $t = 2$, $t = 3$ et ainsi de suite jusqu'à $t = 20$.



La même figure avec la loi binomiale limite $\mathrm{B}(30, e^{-t/6})$ au lieu de $\mathrm{B}\left(30, (1 - t/180)^{30}\right)$ serait d'ailleurs à l'œil quasiment identique à celle-là. Bien qu'en principe le tracé d'une distribution ne permette pas en général une lecture immédiate de son espérance mathématique, il n'en va heureusement pas de même pour une distribution binomiale. En effet, on peut montrer que la valeur la plus probable (le mode) de $\mathrm{B}(\mathrm{N}, p)$ est prise une fois (exceptionnellement deux), pour des entiers k tels que $k - \mathrm{N}p$ est compris entre $p - 1$ et p, nombres inférieurs à 1 en valeur absolue. En effet, la plus grande valeur du nombre $\binom{\mathrm{N}}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ est obtenue lorsque k est la partie entière ω du réel $\mathrm{N}p + p$ et aussi, si $\mathrm{N}p + p$ est entier, par $\omega - 1$.

Sur la surface ici représentée, il suffit donc de suivre la ligne de crête dont la projection sur le plan (t, k) est une bonne approximation de la courbe idéale d'équation $k = \mathrm{N}\,e^{-\lambda t}$. En regardant attentivement, on peut y lire que l'axe des t, asymptote de cette courbe, en est encore relativement éloigné, même pour $t = 20$: c'est normal, puisque $30 \exp(-20/6)$ est approximativement égal à 1.

Notons que cette heureuse (et assez peu connue) propriété du mode de la loi binomiale a une conséquence appréciable : dans tout ce qui précède, on aurait pu remplacer l'expression « valeur moyenne » par « valeur la plus probable ». L'erreur n'aurait pas été très grande en l'occurrence, mais le faire *a priori* aurait été dangereux.

Le passage du modèle à n pas à un phénomène continu se justifiant comme à l'accoutumée - on remplace p^n par sa limite $m = e^{-\lambda t}$ -, on voit que le problème physico-mathématique de l'estimation de la valeur moyenne de $\mathrm{N}(t)$ est donc éclairci par ce décryptage complet du modèle, obtenu grâce à une interprétation réellement pluridisciplinaire des problèmes posés par la loi de la radioactivité. Cette valeur moyenne est l'espérance mathématique $\mathrm{N}m = \mathrm{N}e^{-\lambda t}$ d'une variable aléatoire X, limite « en loi » de la variable X_n, qui suit la loi binomiale $\mathrm{B}(\mathrm{N}, m)$. Sa variance est $\mathrm{N}\,m(1-m)$.

On peut même aller plus loin et montrer, à l'aide d'un cours de Calcul des Probabilités pour l'enseignement supérieur, que pour N assez grand le pourcentage $\dfrac{\mathrm{N}(t)}{\mathrm{N}}$ de noyaux survivants à l'instant $t > 0$, toujours compris entre 0 et 1, définit une variable aléatoire $\dfrac{\mathrm{X}}{\mathrm{N}}$ suivant approximativement une loi normale d'espérance m et de variance $\dfrac{m(1-m)}{\mathrm{N}}$. Que cette dernière quantité décroisse lorsque N augmente traduit simplement le fait que les fluctuations relatives des désintégrations sont d'autant mieux contrôlées que le nombre initial de noyaux est grand. C'est le bon sens même, mais il est agréable d'en avoir confirmation par une étude scientifique probante.

6. LOI BINOMIALE OU LOI DE POISSON ?

La loi binomiale $\mathrm{B}(\mathrm{N}, p)$ est mal aimée des statisticiens, puisqu'elle dépend de deux paramètres. Dès que cela est possible, on la remplace par une loi à un paramètre $\mathrm{P}(\mathrm{E})$, dite de Poisson, où $\mathrm{E} = \mathrm{N}p$ est l'espérance mathématique de la précédente. Cette loi admet heureusement la même espérance mathématique, à savoir E. Sa variance est très simple, car égale à E ; certes ce n'est pas exactement la variance de la loi binomiale qui vaut $\mathrm{N}p(1-p)$, mais elle n'en diffère que de $\mathrm{N}p^2$, quantité souvent petite (par exemple $\mathrm{N}\left(1 - \dfrac{\lambda t}{n}\right)^{2n}$ est à peu près égal à $\mathrm{N}\,e^{-2\lambda t}$, ce qui est petit dès que t est grand).

De façon plus précise, on admet que le remplacement de la loi binomiale $\mathrm{B}(\mathrm{N}, p)$ par la loi de Poisson $\mathrm{P}(\mathrm{N}p)$ est licite pour $\mathrm{N} > 30$, $p < 0{,}1$ et $\mathrm{N}p < 15$. Parler de l'intervention d'une loi de Poisson dans l'interprétation précédente de la loi de raréfaction est donc possible, mais n'est vraiment acceptable que pour des valeurs de λ et de t vérifiant une inégalité de la forme $e^{-\lambda t} < \varepsilon$ où ε est généralement très petit. Comme ce n'est pas le cas général, il vaut donc mieux en rester à la loi binomiale.

Postface

Cet article a été rendu possible grâce aux idées percutantes de Jean-Marie Parisi, professeur au lycée Loritz de Nancy, et à la fructueuse collaboration « matheux »-« physicien » que nous avons connue à l'occasion de l'élaboration d'un cours satisfaisant les deux types d'exigences, ainsi bien entendu qu'aux excellentes habitudes de confrontation scientifique prises pendant quinze années de travail amical commun avec l'inspecteur général Jean-Pierre Sarmant.

On lira avec intérêt plusieurs notes de H. Gié et H. Le Bail d'une part, A. Briguet et M. Dellagi d'autre part, dans les numéros 627 (octobre 1980) et 605 (mai 1978) du *Bulletin de l'Union des Physiciens*, débusquées après l'écriture de cet article, qui contiennent des points de vue intéressants souvent proches de son contenu. Signalons encore un texte plus ancien, « Binomial aspects of radioactivity », de Lawrence Ruby (*American Journal of Physics*, vol. 45, n° 4, avril 1977, pages 380-1), qui utilise des mathématiques plus techniques sans véritable nécessité, et faisant même allusion à la transformation de Laplace. Enfin, le livre fondamental est bien entendu *Radiations from radioactive substances* de Rutherford, Chadwick et Ellis (Cambridge University Press, 1920, en particulier page 172).

André WARUSFEL
Inspecteur général honoraire de mathématiques
Paris IVe

Annexe 1

De l'expérience à la conjecture

Le, dispositifs expérimentaux ne permettent pas en général d'obtenir directement $N(t)$, mais seulement des nombres $c\left[N(t+\Delta t)-N(t)\right]$ où c est une constante souvent inconnue dépendant de l'appareil de mesure, Δt est petit et librement fixé par le physicien. La formulation de la conjecture selon laquelle il existe une constante λ indépendante de Δt vérifiant l'égalité approchée $N(t+\Delta t)-N(t) \approx -\lambda N(t)\Delta t$ ne peut donc être directement extraite de l'examen des faits expérimentaux.

Par contre, en faisant varier t et Δt, on peut constater que, pour des intervalles de temps variables h souvent nettement plus grands que Δt, il existe un nombre $q(h)$, indépendant de c, de t et de Δt, vérifiant l'égalité approchée

$$\frac{N(t+h+\Delta t)-N(t+h)}{\Delta t} \approx q(h)\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$$

(par exemple, $\Delta t = 1$ s pour des h de l'ordre de 10 s ou même bien davantage). En d'autres termes, on peut constater que *les activités mesurées à des dates en progression arithmétique sont en progression géométrique*. Nous admettrons que cela reste vrai si h devient petit, par exemple de l'ordre de Δt.

Pour passer à la conjecture sans connaître $N(t)$ ni c, il suffit maintenant de faire un petit calcul. Posant $\varphi(t) = N(t+h) - q(h)N(t)$, l'égalité approchée s'écrit très simplement $\varphi(t+\Delta t) \approx \varphi(t)$. La fonction périodique φ admet en $+\infty$ une limite nulle si l'on admet que tout noyau va finir par se désintégrer (c'est-à-dire $\lim_{t\to+\infty} N(t) = 0$). Elle est donc nulle, d'où

$$N(t+h) \approx q(h)N(t), \quad q(h) \approx \frac{N(h)}{N(0)} \approx \frac{N(h)}{N}$$

puis les égalités (toujours approchées)

$$\frac{\Delta N}{\Delta t}(t) \approx \frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} \approx \frac{q(\Delta t)-1}{\Delta t}N(t) \approx \frac{N(\Delta t)-N(0)}{N\,\Delta t}N(t)$$

cette dernière expression étant elle-même voisine, lorsque Δt est assez petit, de $-\lambda N(t)$ où $\lambda \approx -\dfrac{N'(0)}{N}$. La conjecture est maintenant bien mise en place.

NB : *A posteriori*, la connaissance de la loi de décroissance permet de retrouver que $q(h)$ est constant, puisque $\dfrac{N(t+h)}{N(t)} = e^{-\lambda h}$. Une suite de mesures permet donc d'obtenir, à partir de $q = q(h)$, une valeur approchée de λ par l'égalité $\lambda \approx \dfrac{-\ln q}{h}$, puis (si l'on connaît c) de $N = N(0)$ par $N \approx \dfrac{N'(0)}{\lambda}$ ainsi qu'une valeur approchée de la durée de demi-vie, définie par $N(t_{1/2}) = N/2$, donc par l'égalité $t_{1/2} \approx \frac{\ln 2}{\lambda}$. Enfin, lorsque q est très proche de 1, ce qui se produit lorsque h est petit, on peut pratiquement remplacer $-\ln q$ par $1 - q$.

Par exemple, pour $\Delta t = 1$ s et $h = 10$ s, la suite de mesures d'activités

(1229, 1094, 965, 842, 750, ...)

donne comme valeurs approchées $q \approx 0{,}887$, $\lambda \approx 0{,}012$ et $t_{1/2} \approx 58$ s, le nombre de noyaux à l'instant 0 étant d'environ $\frac{102\,500}{c}$. À titre de vérification, on peut en déduire les différentes valeurs de l'activité $-N'(t) = \lambda N e^{-\lambda t}$ et pour $t = 10\,k$, soit encore $\lambda N q^k$, ce qui donne la suite (1229, 1090, 967, 858, 761, ...), en accord satisfaisant avec la liste des mesures effectives donnée plus haut.

Annexe 2

Problème différentiel $y' = y$, $y(0) = 1$ [(2)]

- *Unicité de la solution*

  Soit e une éventuelle solution, et ω définie par $\omega(x) = e(-x)$. Pour toute solution y, la fonction ωy est constante et égale à 1 : par suite ω ne s'annule pas et $y = \dfrac{1}{\omega} = e$.

- *Existence de la solution*

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout couple (x, h) de réels vérifiant $h \geqslant -1$ et $x \geqslant -n$, on dispose des relations

$$\varphi(h) = \left(1 + \frac{x+h}{n+1}\right)^{n+1} - (1+h)\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} \geq 0$$

  [donc $\varphi'(h)$ a le signe de $h - \dfrac{x}{n}$ et φ admet sur $[-1, +\infty[$ un minimum égal à $\varphi\left(\dfrac{x}{n}\right) = 0$].

- On en déduit l'inégalité $\left[1 + \dfrac{x}{n}\right]^{n} \leqslant \left[1 + \dfrac{x}{n+1}\right]^{n+1}$

  puis, pour $n > x$, les encadrements

$$\left[1 + \frac{x}{n}\right]^{n} \leqslant \left[1 + \frac{x}{n+1}\right]^{n+1} \leqslant \left[1 - \frac{x}{n+1}\right]^{-n-1} \leqslant \left[1 - \frac{x}{n}\right]^{-n}$$

- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, la suite $\left[1 + \dfrac{x}{n}\right]^{n}$, fille de la méthode d'Euler, majorée et croissante (au moins à partir d'un certain rang), admet donc une limite notée $e(x)$. Notons que $e(0) = 1$ et que $(1+h)\,e(x) \leqslant e(x+h)$.

- Soit $|h| < 1$. En changeant (x, h) en $(x+h, -h)$, on a pour $n > -x-h$ les inégalités

$$(1-h)\left[1 + \frac{x+h}{n}\right]^{n} \leqslant \left[1 + \frac{x}{n+1}\right]^{n+1}$$

$$(1-h)\,e(x+h) \leqslant e(x)$$

$$0 \leqslant e(x+h) - e(x) - h\,e(x) \leqslant \frac{h^2}{1-h}\,e(x)$$

  qui montrent que la fonction e résout le problème.

(2) Le contenu des deux annexes 2 et 3 est essentiellement repris du cours de Terminale S (Vuibert, 2002) rédigé par André WARUSFEL, Paul ATTALI, Michel COLLET, Christian GAUTIER et Serge NICOLAS, volumes 2 et 4, en vente à l'APMEP.

♦ *Remarques*

En résultent les relations $e(x+y) = e(x)\,e(y)$, $e(x)\,e(-x) = 1$, $e(x) > 0$, $e(x) \geqslant 1 + x$, $e(x) \to +\infty$ avec x, $e(x) \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ pour $x \geqslant 0$, $\dfrac{e(x)}{x} \to +\infty$ avec x, $e(x) - 1 \sim x$ en 0, $e(r) = e^r$ où $e = e(1)$ et $r \in \mathbf{Q}$ etc. On peut aussi montrer que $e(x)$ est également la limite de la suite décroissante $\left[1 - \dfrac{x}{n}\right]^{-n}$, etc. Bien entendu, la fonction e ainsi définie n'est autre que la fonction exponentielle. Il est facile ensuite d'en déduire une construction de la fonction logarithme, et de retrouver le contenu d'un cours classique d'analyse.

NB : L'inégalité de départ s'écrit aussi $(1+t)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)t$ pour

$$t = \frac{nh - x}{(n+x)(n+1)} \geqslant -\frac{1}{n+1}.$$

Annexe 3

Une loi binomiale fort bienvenue

Pour montrer que la variable aléatoire X_n définie au 4) suit la loi binomiale $B(N, p^n)$, il suffit d'identifier de façon précise chaque dé (chaque urne, chaque noyau, ...). S'intéressant alors au sort de l'un d'entre eux, on voit immédiatement que la probabilité pour qu'il soit encore présent au n-ième top vaut p^n. Cela fait pour tous les dés, il ne reste plus qu'à dénombrer toutes les possibilités pour que k exactement parmi les N du départ aient survécu, soit $\binom{N}{k}$ pour tomber pile sur la loi binomiale de paramètres N et p^n. Voici une autre démonstration calculatoire (plus lourde) par récurrence sur n. Tout est clair pour $n = 0$ puisqu'alors X_0 prend la valeur N avec la probabilité 1 et les autres avec la valeur 0. Supposons donc le résultat acquis pour $n - 1 \geq 0$, notons $q = 1 - p$ et fixons un entier k entre 0 et N. Il vient la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
\mathrm{Prob}(X_n = k) &= \sum_{h=k}^{N} \mathrm{Prob}(X_{n-1} = h)\,\mathrm{Prob}\Big((X_n = k)\big|_{(X_{n-1}=h)}\Big) \\
&= \sum_{h=k}^{N} \binom{N}{h} \left(p^{n-1}\right)^h \left(1 - p^{n-1}\right)^{N-h} \binom{h}{k} p^k q^{h-k} \\
&= \binom{N}{k} \sum_{h=k}^{N} \binom{N-k}{h-k} p^{(n-1)h+k} \left(1 - p^{n-1}\right)^{N-h} q^{h-k} \\
&= \binom{N}{k} p^{nk} \sum_{h=k}^{N} \binom{N-k}{h-k} p^{(n-1)(h-k)} q^{h-k} \left(1 - p^{n-1}\right)^{N-h} \\
&= \binom{N}{k} p^{nk} \left[p^{n-1} q + (1 - p^{n-1})\right]^{N-k} = \binom{N}{k} p^{nk} \left(1 - p^n\right)^{N-k}
\end{aligned}$$

puisque $\binom{N}{h}\binom{h}{k} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{h-k}$ et $p^{n-1} q = p^{n-1} - p^n$. On pourra remarquer que même la démonstration par récurrence est facile à suivre, la vraie difficulté résidant en la découverte de la forme de la proposition à vérifier ! Heureusement, le raisonnement heuristique du 4) aide beaucoup l'intuition dans cette tâche. Pour sa part, la preuve directe - due à Jean MOUSSA - est presque évidente, mais demande d'avoir correctement deviné la grande simplicité qui se cachait derrière l'apparente complexité du mécanisme étudié (*cf.* note 2).

Annexe 4

Le programme Mathematica

Voici les commandes de Mathematica qui ont engendré la figure de l'article :

```
<<Statistics'DiscreteDistributions'
f[t_,k_] := PDF[BinomialDistribution[30, (1 - t/180)^30],k]
a = SurfaceGraphics[Table[f[t, k], {t, 1, 20}, {k, 0, 30}]]
Show[a, Boxed -> False, Axes -> True, PlotRange -> {0, 0.8},
AspectRatio -> 1.3, AxesLabel -> {k, t, Proba}]
```

On aurait pu définir $f[t, k]$ de manière directe, par la suite récursive des instructions :

```
p[t_] :=(1-t/180)^30
f[t_,0] :=(1-p[t])^30
f[t_,k_] :=f[t,k-1]*(-1+31/k)/(-1+1/p[t])
```

Les lecteurs désireux de travailler sous *Maple* pourront enrichir le noyau suivant :

```
f :=(k,t)->stats[statevalf,pf,binomiald[30,evalf((1-t/180)^30)]] (k-1) :
plots [matrixplot] (linalg [matrix] (31,20,f),orientation= [-60,20]) ;
```

Des figures analogues, un peu moins élégantes, peuvent être obtenues grâce aux logiciels *Derive 5*, *Excel* ou *MathCad*.

Annexe 5

Une autre approche

Rappelons ici l'approche axiomatique privilégiée présentée dans les documents d'accompagnement communs aux programmes scientifiques de teminale S.

Postulat

On admet que, pour toute substance radioactive donnée, il existe une fonction π *:* $\mathbf{R}_+ \mapsto]0, 1]$ *telle que la probabilité qu'un atome a de cette substance ne soit pas désintégré à l'instant* $t_0 + t$*, sachant qu'il ne l'était pas à l'instant t, est égale à* $\pi(t)$ *et ne dépend donc pas du réel positif* t_0.

Cette proposition traduit simplement que les atomes sont deux à deux indiscernables quant au mode de leur désintégration aléatoire, qu'ils n'ont pas de « mémoire » et qu'ils n'interagissent pas les uns sur les autres lorsqu'ils sont en groupe.

Elle implique évidemment la relation générale $\pi(t + t') = \pi(t)\,\pi(t')$ pour tout couple (t, t') de réels positifs. Un raisonnement classique implique l'égalité $\pi(kt) = \left(\pi(t)\right)^k$ d'abord pour tout entier naturel k, puis pour tout rationnel positif ou nul. En particulier, notant $\omega = \pi(1) \in]0, 1]$, il vient $\pi(r) = \omega^r$ pour tout rationnel positif r.

La relation fonctionnelle ci-dessus implique la monotonie de la fonction π (dont les valeurs sont inférieures à 1), ce qui, joint à la densité des rationnels parmi les réels, montre alors que cette relation reste vraie pour tout r réel positif.

Si l'on observe simultanément une famille $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ de N atomes de la même substance non encore désintégrés à l'instant $t_0 = 0$, le nombre de noyaux non encore désintégrés à l'instant $t \geqslant 0$ parmi les N définit une variable aléatoire

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_N$$

où V_i est la variable aléatoire de BERNOULLI prenant la valeur 1 si a_i est encore en vie et 0 sinon.

L'espérance mathématique de V_i est égale à $\pi(t)$ d'après la définition de cette fonction. Il en résulte que celle de V vaut $N\pi(t) = N\omega^t$; de plus, les variables V_i sont indépendantes par le postulat et leur somme V suit bien la loi binomiale $B(N, \omega^t)$. Il ne reste plus qu'à poser $\omega = e^{-\lambda}$ pour retrouver les notations précédentes.

A priori, λ est positif ou nul puisque $0 < \omega \leqslant 1$. Mais le cas $\lambda = 0$, équivalent à $\pi = 1$, est évidemment à exclure si les noyaux ont une probabilité non nulle d'être désintégrés.

André WARUSFEL