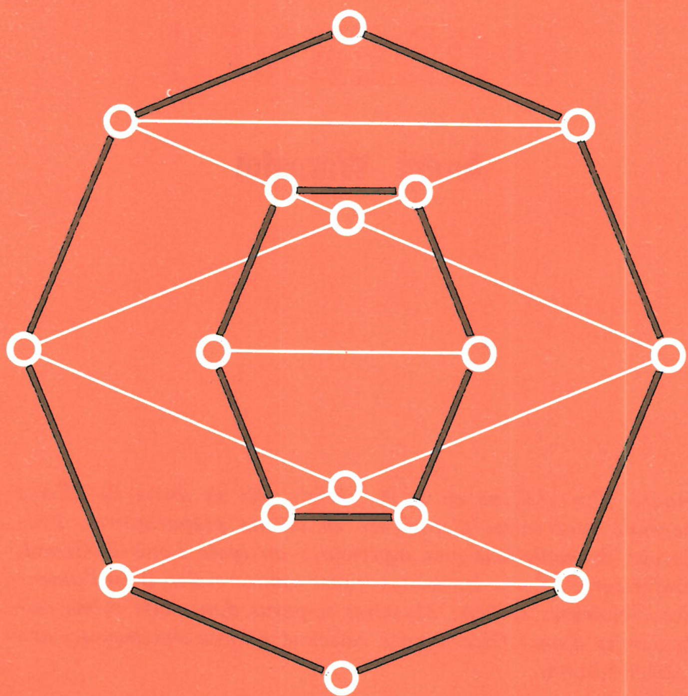
Les Éditions du Seuil présentent le trentième volume de la série LE RAYON DE LA SCIENCE des collections Microcosme, publiée sous la direction d'André Warusfel avec la collaboration de Simone Lescuyer.

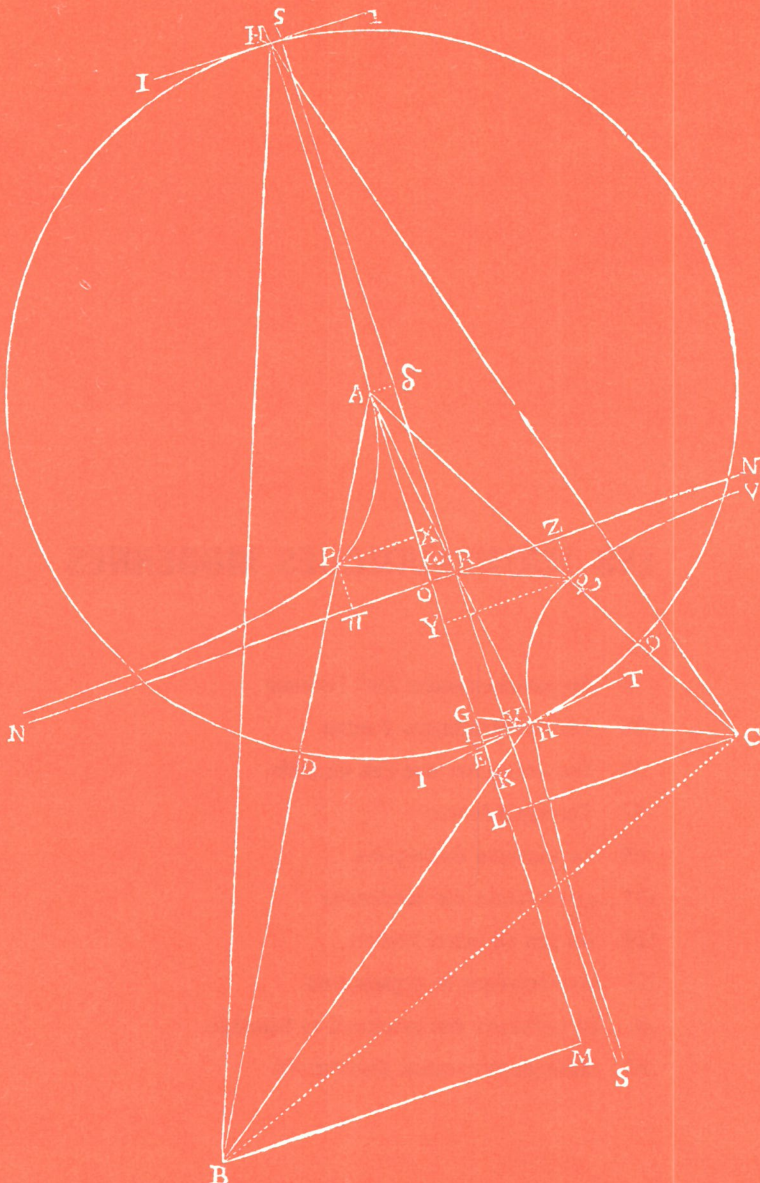
# LES MATHÉMATIQUES MODERNES

## André Warusfel

*André Warusfel, né en 1936, choisit, dès sa sortie de l'École normale supérieure, d'enseigner en classes préparatoires. Professeur de mathématiques supérieures au lycée Louis-le-Grand, professeur à l'École des hautes études commerciales, il est l'auteur des « Nombres et leurs Mystères », parus dans cette même collection et d'un « Dictionnaire raisonné de mathématiques » aux mêmes éditions.*



# LES MATHÉMATIQUES MODERNES


S
L
H
I
A
δ
N
V
Z
X
ω
R
P
O
π
Y
T
G
K
C
D
E
M
B

# Au commencement était l'axiome

*Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de* formes *abstraites, les structures mathématiques ; et il se trouve — sans qu'on sache bien pourquoi — que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ces formes, comme par une sorte de préadaptation. Il n'est pas niable, bien entendu, que la plupart de ces formes avaient à l'origine un contenu intuitif bien déterminé ; mais c'est précisément en les vidant volontairement de ce contenu qu'on a su leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance, et qu'on les a rendues susceptibles de recevoir des interprétations nouvelles et de remplir pleinement leur rôle élaborateur.*

*C'est seulement avec ce sens du mot « forme » qu'on peut dire que la méthode axiomatique est un « formalisme » ; l'unité qu'elle confère à la mathématique, ce n'est pas l'armature de la logique formelle, unité de squelette sans vie ; c'est la sève nourricière d'un organisme en plein développement, le souple et fécond instrument de recherches auquel ont consciemment travaillé, depuis Gauss, tous les grands penseurs des mathématiques, tous ceux qui, suivant la formule de Lejeune-Dirichlet, ont toujours tendu à « substituer les* idées *au* calcul ».

Nicolas Bourbaki in *Les grands courants de la pensée mathématique* (F. Le Lionnais).

Il n'y a pas de *mathématiques modernes.*

Ces deux mots anodins font pourtant régner la terreur dans des millions de foyers où les parents, angoissés, « sèchent » sur des problèmes donnés à leurs fils en quatrième. Ces deux mots, surtout quand ils sont écrits au singulier, ont fait l'objet de dizaines de colloques dans le monde entier, ont fait vendre d'innombrables livres, ont découragé des milliers d'élèves (qui ont parfois même abandonné l'idée d'une carrière scientifique) ainsi, bien souvent, que leurs professeurs, désolés de voir qu'il leur restait à apprendre à leur tour. Pourtant cette appellation internationale est absurde. Quand ce ne serait, d'abord, que parce qu'il est dangereux d'accoler l'adjectif « moderne » à quoi que ce soit : que l'on évoque le Modern' Style! Mais surtout ces mathématiques-là ne sont ni modernes, ni « nouvelles » ; ce sont simplement... des mathématiques, et l'objet de ce livre est en particulier d'affirmer, voire de démontrer, qu'il n'y a pas de rupture entre les maths d'hier et celles d'aujourd'hui, que celles-ci sont bien de la famille, et même qu'il était fatal qu'on en vînt là un jour.

Bannissons donc de notre esprit, sinon tout à fait de notre vocabulaire, les mots « modernes », « nouvelles », « contemporaines » ou « d'aujourd'hui », dont l'usage malencontreux a contribué à élargir un fossé qu'il faut bien combler.

Car personne ne songe à nier, bien entendu, que l'évolution de notre science, si elle est restée continue, ne pose de graves problèmes à notre génération. Sur les circuits de course automobile, aux longues lignes droites succèdent des épingles à cheveux ; il faut y jouer adroitement des rapports de la boîte pour ne pas être projeté hors de la piste avant de pouvoir reprendre le régime de pleine puissance. Les mathématiciens professionnels sont de nouveau dans la ligne droite, non sans avoir, au début de ce siècle, cassé quelques moteurs ou perdu certains pilotes. Les professeurs de mathématiques s'échelonnent entre le milieu du virage et sa sortie, les plus anciens étant généralement les plus prudents et cherchant à amortir au maximum les effets désagréables d'une accélération trop forte, réduisant leur vitesse de manière à garder toujours le contrôle de leur véhicule. Seuls quelques scientifiques (nés après 1935) ont eu la chance d'entrer d'emblée, au moins au cours de leurs études supérieures, dans la partie rectiligne. Ils prouvent que le problème qui nous occupe aura nécessairement une solution : dans cinquante ans tous auront sucé le lait des mathématiques modernes dès la mammelle. D'ici là, il nous faut faire franchir l'obstacle au plus grand nombre, et laisser faire Chronos.

## Les axiomes d'Euclide

Il nous faut d'abord remonter bien haut dans le cours de l'histoire. Le « père des mathématiques modernes » est un Grec du troisième siècle avant J.-C. C'est en effet Euclide [1] qui a introduit la méthode axiomatique dans ses célèbres *Éléments*, et les révolutionnaires de la fin du siècle dernier ne firent que renouer avec lui à travers les âges.

En tête des *Éléments* figurent en effet des *axiomes* et des *postulats* ; d'autres sont introduits en cours de route. Essayons de voir pourquoi leur usage est important, et pourquoi Euclide s'est montré là un précurseur. Un axiome est l'affirmation d'une propriété non démontrée mais admise telle quelle. (Bien que les Grecs aient introduit une distinction, d'ailleurs assez obscure, entre postulat et axiome, nous les confondons aujourd'hui). Ainsi « par deux points distincts il passe une droite et une seule » est un axiome. Il ne faut pas confondre avec une définition : « Un point est ce qui n'a pas de parties » est une définition (bien que cela n'ait pas un sens précis et reste donc inutilisable) ; « un point n'a pas de parties » peut être considéré par contre comme un axiome. Donnons un autre exemple : « si deux grandeurs sont égales à une même troisième, alors elles sont égales entre elles ». Citons enfin le célèbre postulat dit d'Euclide : « par un point extérieur à une droite, il passe exactement une parallèle à cette droite ».

## Le programme euclidien

Les exemples ci-dessus sont typiques de la démarche d'esprit des Grecs, qui ne concevaient l'axiome que comme une propriété admise sans démonstration, soit à cause de son

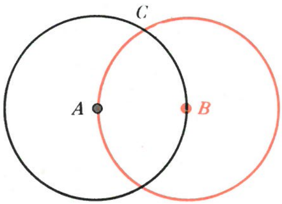
1. Si aujourd'hui son nom est symbole de réaction, c'est un mathématicien français qui en est involontairement la cause. Lors du Congrès des mathématiciens de 1959 (Royaumont), J. Dieudonné s'écria : *A bas Euclide* ! Mais ce que visait le coauteur de Bourbaki par cette apostrophe vigoureuse, c'était l'enseignement classique de la géométrie et l'usage systématique du triangle, non le génie de l'auteur du premier grand *Traité de mathématiques*.

évidence (comment refuser que $a = b$ et $b = c$ entraînent $a = c$ ?), soit faute de pouvoir en donner une démonstration ; *postulare* signifie demander, et un postulat est ce que l'on demande au lecteur d'accepter sans preuve.

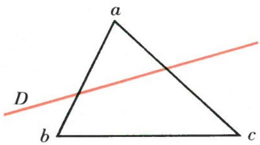
Nous verrons plus loin que ce sens du terme axiome est trop pauvre, mais tenons-nous y pour l'instant. Une fois posés les axiomes de départ et les définitions destinées à fournir des matériaux à la démarche mathématique, nous ne devons plus accepter aucun autre résultat que démontré. Une *démonstration* est un raisonnement logique qui, à partir des propriétés déjà acceptées (axiomes ou théorèmes démontrés précédemment) et des nouvelles définitions éventuelles, établit la véracité d'une proposition. Ainsi, après avoir démontré que les trois médiatrices des côtés d'un triangle ont un point commun, on donne à ce point le nom de centre du cercle circonscrit : on démontre en effet qu'il est le centre d'un cercle passant par les trois sommets, que ce cercle est unique, etc. Tout ceci repose sur une conception philosophique qui ne serait plus reçue unanimement aujourd'hui : *la mathématique a une existence réelle ;* c'est un continent encore presque vierge sur lequel, à partir de têtes de pont (les axiomes) on part à la découverte en traçant des pistes respectant les règles de la logique.

Si l'on peut critiquer une vue aussi naïve, l'essentiel reste valable : avouer franchement ce que l'on admet, et bâtir le reste là-dessus avec toute la rigueur possible, rigueur née le jour où l'on ne s'est plus contenté de constater expérimentalement certaines régularités dans les nombres ou les figures géométriques, mais où *on a cherché la raison de ces régularités.*

Il faut reconnaître l'extrême ambition de ce programme. L'intuition, notamment en géométrie, est si forte que l'on admet toujours involontairement de nombreux résultats. Ainsi la première démonstration d'Euclide est-elle faussée à la base par une omission inacceptable. Construisant le cercle de centre $A$ passant par $B$ et le cercle de centre $B$ passant par $A$, il considère l'un de leurs points d'intersection ; or rien ne prouve l'existence d'un tel point, hormis, évidemment, l'aspect de la figure : mais l'appel à une telle expérience tangible est interdit ! L'expérience est précieuse pour suggérer, mais ne peut pas servir d'élément de démonstration.




Et s'il existait des trous dans les deux cercles? En se limitant aux points dont les coordonnées, dans un système d'axes convenable, sont des nombres rationnels, on peut montrer que les deux cercles ci-contre, centrés aux points de coordonnées (— 1, 0) et (+ 1, 0) *n'ont alors aucun point d'intersection.* L'existence du point $C$ n'est donc pas une conséquence des axiomes d'Euclide, qui sont incomplets.




**L'axiome de Pasch.** Indispensable à l'édification de la géométrie euclidienne, cet axiome affirme que si une droite $D$ coupe la droite $ab$ entre $a$ et $b$, elle doit alors nécessairement couper $bc$ entre $b$ et $c$ ou $ac$ entre $a$ et $c$.

## Pourquoi Euclide a échoué

Euclide a donc échoué. Son système d'axiomes était nettement insuffisant, et il n'a jamais cherché à expliciter ce qui joue, dans ses démonstrations, un rôle au moins aussi important : la liste des opérations logiques permises, par lesquelles on peut justifier un résultat. Là aussi les mathématiciens, pour un très long temps, furent empiristes et intuitionnistes : était suffisamment prouvé ce qui entraînait l'adhésion des hommes intelligents auxquels on exposait le déroulement de la preuve (quelque chose comme l' « intime conviction » des juristes était donc considéré comme le critère ultime de la vérité mathématique).

Ne critiquons pas trop vite. D'abord rien ne nous dit ce que les siècles à venir nous réservent; la notion de « rigueur » évolue sans cesse et, bien que l'on ait accompli des progrès décisifs (ainsi certaines démonstrations peuvent être testées sur machines), l' « intime conviction » reste souvent la vraie pierre de touche. D'autre part aucune démonstration mathématique, à quelque niveau qu'elle soit faite, n'est complète même si elle satisfait les exigences actuelles de la rigueur.

En effet, ou bien elle est élémentaire et faite à l'usage de débutants : il importe alors de ne pas l'alourdir de subtilités inaccessibles pour eux. Quand on dit par exemple « soit $x$ le plus grand nombre entier tel que $3x$ soit inférieur à $y$ », qui nous prouve qu'il existe bien un tel nombre $x$ et qu'il est unique? Cela peut se justifier, mais il est douteux qu'un jeune lycéen puisse en saisir le mécanisme. Au niveau supérieur, les parties « triviales » (c'est-à-dire démontrables presque instantanément par tout lecteur averti) ne sont jamais traitées ; souvent même on évite de signaler la nécessité de contrôler telle affirmation de l'auteur afin de ne pas alourdir le texte. Le souci de ne pas laisser les arbres cacher la forêt et, au contraire, de mettre en vedette les seuls points importants d'une preuve fait donc que, contrairement à une opinion répandue, *on triche constamment en mathématiques!*

Cela dit, nous pouvons donc rendre à Euclide, même défaillant, un hommage sans restrictions, et penser de lui, comme Einstein de Newton qu'il venait de détrôner, qu'il avait fait davantage que tout autre : seule son époque l'avait empêché de faire mieux. Il fut loin d'être entièrement compris de ses successeurs. Si l'on continua à réciter scrupuleusement Euclide jusqu'à une époque récente, c'était plus par respect de la tradition et de la forme que du contenu. En effet, lorsque les mathématiciens italiens de la Renaissance introduisirent les nombres complexes (imaginaires), nul ne se soucia de poser explicitement les axiomes régissant ces nouveaux nombres. Il était pourtant manifeste qu'effectuer sur les nombres $x + iy$ les mêmes calculs que sur les nombres réels ne résulte pas de l'ensemble des mathématiques de l'époque! Que les vieillards (âgés de plus de trente-cinq ans aujourd'hui) rouvrent leurs livres scolaires : y trouveront-ils quelque axiome? A quelque rare exception près, on peut être certain qu'aucun axiome autre que celui d'Euclide n'y figure. On y parle, en revanche, d'amener deux triangles à coïncider par transport, opération soigneusement interdite, par la suite, aux étudiants : est-ce que les cas d'égalité des triangles, que l'on déduisait ainsi, n'étaient pas réellement non démontrés, et par conséquent admis comme des vérités premières suggérées par l'expérience? Il eût été plus honnête, et plus « euclidien », de leur donner franchement le nom d'axiome.

## La succession euclidienne

L'enrichissement de la liste d'Euclide s'était pourtant effectué dans deux voies très différentes. En 1898, l'Allemand Hilbert publiait une liste de vingt-sept axiomes permettant la construction rigoureuse, avec la logique traditionnelle, de la géométrie classique. Il montrait également que sa liste ne pouvait pas être réellement écourtée ; on comprend mieux, dès lors, l'échec d'Euclide. On comprend également pourquoi aucun livre scolaire de géométrie ne reprit entièrement le travail d'Hilbert[1] !

Bien avant Hilbert, de très nombreux chercheurs avaient tenté de résoudre l'énigme du postulat d'Euclide. Qu'il suffise de citer Saccheri, Lambert, Bolyai, Gauss, Lobatchevsky, Riemann : on sait que leurs travaux montrèrent finalement qu'il pouvait exister d'autres systèmes d'axiomes conduisant à d'autres listes de théorèmes, donc à d'autres géométries que celle d'Euclide. Poincaré montra même que toute contradiction dans la géométrie de Riemann (où il n'existe pas de parallèles) ou dans celle de Lobatchevsky (où, par un point donné, passent une infinité de parallèles à une droite donnée), conduirait à une contradiction dans la géométrie d'Euclide, puisqu'il construisit à l'intérieur de celle-ci des « modèles »[2] des deux autres. Ce résultat mettait les mathématiciens sur une piste importante : il n'y a peut-être pas de « mathématiques absolues », où l'axiome d'Euclide est vrai ou faux. Les mathématiques ne seraient-elles pas, au contraire, un simple jeu formel, suivant une expression célèbre une manière codifiée d'inscrire des signes sur du papier dont l'intérêt intrinsèque réside en l'extraction des conséquences logiques d'un système d'*axiomes arbitraires cohérents dans leur ensemble sans être nécessairement des « vérités » premières* ?

Les mathématiques ne sont donc plus une description du réel (bien qu'évidemment elles en soient le meilleur révélateur, prêtant la géométrie euclidienne aux architectes et celle de Riemann aux utilisateurs de la *relativité générale*).

→ 14

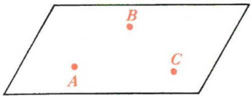
1. Il faut pourtant noter que des livres américains actuels n'hésitent pas à employer près d'une quarantaine d'axiomes introduits au cours du traité : il faut protester avec force contre une telle attitude antipédagogique, qui laisse croire à l'enfant que dès qu'il se présente une difficulté, il suffit d'introduire un nouvel axiome!
2. Voir page 137.

## Les axiomes d'Hilbert

1. Par deux points distincts passe au moins une droite.

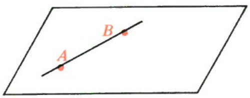

2. Cette droite est unique.

3. Par trois points non alignés passe au moins un plan.

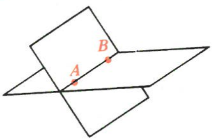



4. Ce plan est unique.

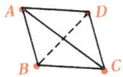
5. Si deux points distincts d'une droite appartiennent au même plan, la droite entière est contenue dans ce plan.




6. Deux plans ayant un point commun en ont au moins un autre.




7. Il existe quatre points qui n'appartiennent pas à un même plan.




8. Dans chaque plan il existe au moins trois points non alignés.

9. Sur chaque droite il existe au moins deux points distincts.

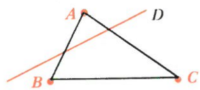
10. Si $B$ est entre $A$ et $C$ (relation qui suppose $ABC$ alignés et distincts) alors $B$ est entre $C$ et $A$.


11. Si $A$ et $B$ sont distincts, il existe au moins deux points $C$ et $D$ tels que $C$ soit entre $A$ et $B$, et $B$ entre $A$ et $D$.


12. Si $A$, $B$, $C$ sont trois points distincts d'une même droite, il en existe un et un seul qui soit entre les autres.

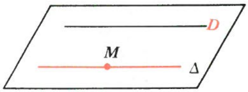
13. Si quatre points distincts d'une droite sont donnés, on peut toujours les appeler $A$, $B$, $C$, $D$ de façon que $B$ soit entre $A$ et $C$, $B$ soit entre $A$ et $D$, $C$ soit entre $A$ et $D$, $C$ soit entre $B$ et $D$.


14. Si $A$, $B$, $C$ ne sont pas alignés et si une droite $D$ de leur plan coupe $AB$ entre $A$ et $B$, alors $D$ coupe nécessairement $AC$ entre $A$ et $C$ ou $BC$ entre $B$ et $C$ (axiome de Pasch).




15. Dans un plan contenant une droite $D$ et un point $M$ extérieur

à $D$, il existe une droite et une seule $\Delta$ passant par $M$ et ne coupant pas $D$ (postulat d'Euclide).




16. Dans l'ensemble des couples de points $(A, B)$ on peut définir une relation notée $(A, B) = (C, D)$ ($AB$ et $CD$ ont même mesure) telle que

$$(A, B) = (A, B).$$

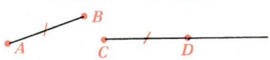
17. Pour tout couple

$$(A, B) = (B, A).$$

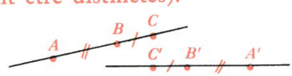
18. $(A, B) = (C, D)$ et $(C, D) = (E, F)$ impliquent $(A, B) = (E, F)$.


19. Si l'on considère une demi-droite d'origine $C$ et un couple $(A, B)$ [une demi-droite est définie à partir de $C$ et d'un point distinct $C'$ comme l'ensemble des points $M$ tels que l'on ait ($M$ entre $C$ et $C'$) ou ($C'$ entre $C$ et $M$)], il y existe un point $D$ tel que

$$(A, B) = (C, D).$$




20. Si $B$ est entre $A$ et $C$ et si $B'$ est entre $A'$ et $C'$, $(A, B) = (A', B')$ et $(B, C) = (B', C')$ impliquent $(A, C) = (A', C')$ (les droites $ABC$ et $A'B'C'$ peuvent être distinctes).




21. Dans l'ensemble des couples de demi-droites de même origine (ou : angles) $(d, \delta)$ on peut définir une relation notée

$$(d, \delta) = (d', \delta')$$

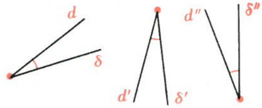
telle que

$$(d, \delta) = (d, \delta).$$

22. Pour tout couple

$$(d, \delta) = (\delta, d).$$

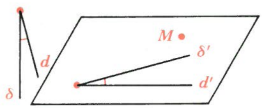
23. $$(d, \delta) = (d', \delta')$$
et $(d', \delta') = (d'', \delta'')$ impliquent $(d, \delta) = (d'', \delta'')$.



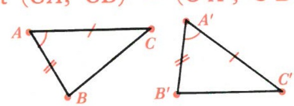

24. Si $(d, \delta)$ est un angle et si $d'$ est une demi-droite d'origine $A$ d'un plan $P$, dans le demi-plan défini par $d'$ et un point $M$ de $P$ non aligné avec $d'$, il existe une demi-droite unique $\delta'$ telle que

$$(d, \delta) = (d', \delta')$$

[le demi-plan défini par $d'$ et $M$ est l'ensemble des points de $d'$ et de ceux qui appartiennent à l'une des demi-droites passant par $M$ dont l'origine est sur $d'$].




25. Si $(A, B) = (A', B')$,
$(A, C) = (A', C')$
et $(AB, AC) = (A'B', A'C')$, alors $(BC, BA) = (B'C', B'A')$ et $(CA, CB) = (C'A', C'B')$.



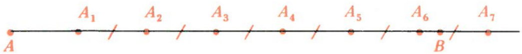
26. Si $A_1$ est entre $A$ et $B$, $A_1$ entre $A$ et $A_2$, $A_2$ entre $A_1$ et $A_3$, $A_3$ entre $A_2$ et $A_4$, etc., et si

$$(A, A_1) = (A_1, A_2) = (A_2, A_3) = (A_3, A_4) = \dots$$

il existe alors un entier $n$ tel que $B$ soit entre $A$ et $A_n$ (axiome d'Archimède).

27. Il est impossible d'ajouter de nouveaux points, droites ou plans à l'espace.

Il existe de nombreuses autres axiomatiques (Kerekjartö, Brisac Choquet, etc.) dont certaines pour le plan seul.




Le système d'Hilbert devient ainsi une construction intellectuelle indépendante, étudiée pour elle-même et non pour les arpenteurs. Hilbert lui-même le soulignait, ses axiomes étant bâtis sur les trois notions, non définies, de point, droite et plan ; il fait remarquer que ces dénominations sont parfaitement arbitraires (!) et qu'il aurait pu, tout aussi bien, les appeler verres de bière, chaises et tables : « par deux verres de bière distincts, passe au moins une chaise... » Des signes sur du papier... n'est-ce pas là la bonne définition des mathématiques ?

Nous allons étudier deux systèmes d'axiomes, importants et très différents, correspondants aux deux sens évoqués ci-dessus du mot axiome. (Nous y rencontrerons pour la première fois, dans ce livre, le mot « ensemble » ; un chapitre lui sera consacré. Qu'on le prenne pour l'instant comme synonyme de « collection ».)

## Les ensembles peaniens

Un *ensemble peanien* est un ensemble $P$ à l'intérieur duquel on a défini une fonction notée $f(x) = x^+$ (on dit encore que $x^+$ est le *successeur*, nécessairement unique, de $x$) satisfaisant aux axiomes suivants :

a) si l'on peut écrire $x^+ = y^+$ pour deux éléments $x$ et $y$, alors nécessairement $x = y$ ;

b) il existe un certain élément noté $z$ qui n'est le successeur d'aucun élément $x$ de l'ensemble (en d'autres termes, il existe au moins un $z$ tel que l'égalité $x^+ = z$ est impossible) ;

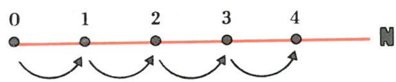
c) si un ensemble $Q$ contient $z$, et si l'on peut montrer qu'il contient nécessairement le successeur $x^+$ de tout élément $x$ appartenant à la fois à $P$ et à $Q$, alors tous les éléments de $P$ sont éléments de $Q$.

Ces axiomes étranges, appelés *axiomes de Peano* (bien qu'ils aient été mis en évidence pour la première fois par Dedekind), n'ont pas du tout été choisis arbitrairement. Ils correspondent à l'ancienne idée de « vérité première » d'Euclide : ces axiomes sont en effet vérifiés par l'ensemble le plus important des mathématiques, l'ensemble **N** des *nombres naturels* ; d'autre part tout ensemble peanien est, en quelque sorte, une « copie conforme » de **N**. Ils n'impliquent pas, néanmoins, qu'il existe au moins un ensemble peanien : ceci est une autre question.

Supposons donc connu l'ensemble **N** des nombres 0, 1, 2, 3, etc. (un tel point de vue est évidemment mathématiquement peu acceptable tant que l'on n'a pas défini **N** : mais nous pouvons adopter ici, dans un souci pédagogique, toute fantaisie qui nous plaira et nous appuyer au maximum sur l'intuition que nous avons tous en commun). Si nous écrivons :

$$0^+ = 1,\ 1^+ = 2,\ 2^+ = 3,\ \ldots,\ n^+ = n + 1,\ \ldots,$$

les axiomes a) et b) sont évidents : de $x + 1 = y + 1$ on déduit bien que $x = y$, et $z$ n'est autre que 0, puisque l'on ne peut avoir $x + 1 = 0$ dans **N**. L'axiome c) est plus délicat à reconnaître : c'est l'axiome qui justifie le *raisonnement par récurrence*. Il affirme, sous une forme plus simple, que si l'on considère une propriété des nombres naturels, vraie pour 0 et *héréditaire* (c'est-à-dire vraie pour $x^+ = x + 1$ dès qu'elle est vérifiée pour $x$), cette propriété[1] est alors vraie pour tous les naturels.




L'application qui transforme $x$ en $x^+ = x + 1$ est symbolisée par la flèche $\curvearrowright$.

1. Supposons en effet qu'elle soit fausse pour certains nombres, et soit $y$ le plus petit nombre pour lequel elle est fausse (nous admettrons l'existence d'un tel nombre, comme étant conforme à l'idée intuitive que nous avons de **N**) ; comme $y$ n'est pas nul par hypothèse, on admettra facilement qu'il est le successeur d'un certain $x$ pour lequel la propriété envisagée est vraie (sinon $y$ ne serait pas le plus petit). Mais ceci contredit le caractère héréditaire de la propriété.

Éclairons ceci par un exemple en prenant la propriété « le nombre $10^x - 1$ est divisible par 9 ». Elle est vraie pour $x = 0$, car $10^0 = 1$, $10^0 - 1 = 0 = 9 \times 0$. Elle est héréditaire : en effet si nous pouvons écrire

$$10^x - 1 = 9\,a,$$

alors

$$10^{x^+} - 1 = 10^{x+1} - 1$$
$$= 10\,(10^x - 1) + 10 - 1 = 90a + 9 = 9b$$

où $b$ est le nombre $(10a + 1)$. Comme elle est vraie pour $x = 0$, elle l'est donc pour $x = 0^+ = 1$, puis pour $x = 1^+ = 2$, etc. L'axiome de récurrence affirme, en quelque sorte, que ce « etc. » contient bien tous les nombres naturels, ce qui est clair pour un nombre *déterminé* tel que 101 (il suffit de recommencer cent fois le même calcul), mais non, a priori, pour tous les nombres.

## L'indépendance des axiomes de Peano

Voilà donc justifié, non sans d'importants recours à l'intuition (mais à quoi d'autre pourrions nous recourir pour le moment ?) le caractère « naturel » des axiomes peaniens, qui veulent décrire les propriétés de base de l'ensemble **N**. Mais il y a plus : nous avons « suffisamment » d'axiomes ; tout ensemble peanien est une *copie* de **N**, c'est-à-dire que

Deux « copies conformes » de **N**.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$A = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \mathrm{VI}, \dots\}$

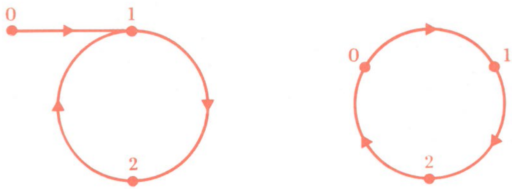
$B = \{$  $, \dots\}$

l'on peut associer à tout élément d'un tel ensemble $P$ un nombre naturel unique $x$ : le nombre correspondant à son successeur sera alors $x^+$. (Une telle correspondance est un *isomorphisme* ; elle revient par exemple à traduire les nombres naturels dans un langage différent : si la forme n'est plus reconnaissable, le fond est identique [1]. Il en est ainsi lorsque l'on change de système de numération en écrivant MCCCXIII au lieu de 1313.) On dit encore que les axiomes de Peano définissent *un seul ensemble* à un isomorphisme près.

A l'aide de ce système qui renferme donc, à l'état potentiel, toute l'arithmétique (qui est l'étude de **N**), nous pouvons définir l'*indépendance* d'un axiome par rapport aux autres postulats du même système. On dira que a) est indépendant de b) et c) pris ensemble s'il existe un ensemble $A$ satisfaisant à b) et à c) mais non à a). Dans ce cas, il existe beaucoup d'exemples de $A$ : il suffit de considérer l'ensemble dont les éléments sont les nombres 0, 1 et 2 (ce que l'on note $A = \{0, 1, 2\}$). Définissons arbitrairement une fonction que nous noterons encore $x^+$ par les égalités :

$$0^+ = 1,\ 1^+ = 2,\ 2^+ = 1.$$

L'égalité $x^+ = 0$ n'est donc jamais vérifiée ; d'autre part tout ensemble $Q$, défini dans l'énoncé de l'axiome c), contient $z = 0$, donc également $1 = 0^+$ et $2 = 1^+$. Pourtant, bien que b) et c) soient vérifiés, a) ne l'est pas, puisque les éléments distincts 0 et 2 ont le même successeur 1. En d'autres termes, on ne pourra jamais déduire l'axiome a) des deux autres.




Si l'on munit $A = \{0, 1, 2\}$ de la fonction $(x \rightsquigarrow x^+)$ symbolisée par le schéma de gauche, les axiomes b) et c) sont vérifiés, mais a) est faux. La fonction définie par le schéma de droite satisfait aux axiomes a) et c), mais non à b).

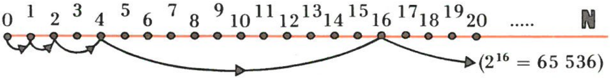
On peut également montrer l'indépendance de b) par rapport à a) et c), en posant cette fois-ci dans $A$ l'égalité $2^+ = 0$ au lieu de $2^+ = 1$. L'indépendance de c) est plus délicate à montrer. Nous donnerons ici deux exemples, très différents, d'ensembles $A$ satisfaisant à a) et b), mais non à c) :

– $A$ est l'ensemble contenant tous les nombres naturels ainsi que tous les nombres de la forme $n + 1/2$, où $n$ est

1. La démonstration détaillée de ce fait n'est pas difficile à imaginer : on montre tout d'abord l'unicité du nombre $z$ n'ayant pas de prédécesseur dans $P$ ; ceci fait, à $z$ on associe l'élément analogue $z'$ d'un autre ensemble peanien $P'$, à $z^+$ on associe $z'^+$ et ainsi de suite.

un nombre entier relatif. Nous poserons encore $x^+ = x + 1$.

$$A = \{ 0, 1, 2, ..., n, ..., -n + 1/2, ..., \\ -5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2, ..., n + 1/2, ... \}$$




L'application définie par $x^+ = 2^x$ satisfait aux axiomes a) et b) mais non à c).

Les axiomes a) et b) sont trivialement vérifiés, mais non c), comme on le voit en prenant pour ensemble $Q$ l'ensemble **N** lui-même, qui ne contient pas $1/2$.

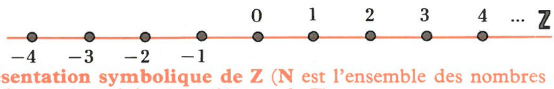
– $A$ est l'ensemble **N** lui-même, où nous poserons $x^+ = 2^x$. Il suffit de considérer l'ensemble $Q$ de toutes les puissances de 2 ($Q = \{ 0, 1, 2, 4, 8, 16, ..., 2^n, ... \}$) pour mettre en défaut l'axiome c.

## **N** existe-t-il ?

Afin de pouvoir comprendre l'étude du système suivant, fixons quelques notations. Nous appelons **N** l'ensemble des nombres naturels (ou entiers positifs ou nuls) ; **N** est justement l'initiale de naturel. Nous appellerons **Z** l'ensemble des *nombres entiers* (ou encore : *relatifs*), positifs, négatifs ou nuls :

$$\mathbf{Z} = \{ ..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ... \}$$

(**Z** comme dans nombres... *zentiers*, ou plutôt comme dans l'allemand *Zahlen*, nombre). Dans **N** et **Z** sont définies (peu importe comment pour l'instant) des opérations : addition,




**Représentation symbolique de Z** (**N** est l'ensemble des nombres situés à droite de 0, 0 étant lui-même élément de **Z**).

multiplication. La soustraction n'est définie que dans **Z**, et non dans **N**, puisqu'il est bien évident que l'écriture $2 - 4$, par exemple, ne représente aucun nombre naturel ; par contre le symbole $(x - y)$, où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs, représente toujours un tel entier. Ceci dit, passons à la définition des groupes.

## Les groupes

Un *groupe* $G$ est un ensemble à l'intérieur duquel on a défini une opération, associant aux éléments $x$ et $y$ du groupe l'élément noté $u = x \circ y$, satisfaisant aux axiomes suivants :
a) étant donnés trois éléments (non nécessairement distincts) $x$, $y$ et $z$ du groupe, si l'on calcule $u = x \circ y$ et $v = y \circ z$, alors on peut écrire :

$$(x \circ y) \circ z = u \circ z = x \circ v = x \circ (y \circ z)$$

(on dit encore que l'opération $\circ$ est *associative*) ;
b) il existe dans le groupe au moins un élément noté $e$ tel que l'on puisse écrire :

$$x = e \circ x = x \circ e$$

quelque soit l'élément $x$ du groupe (on dit que $e$ est un *élément neutre* pour l'opération $\circ$) ;
c) $x$ étant un élément quelconque du groupe, il existe dans le groupe au moins un élément noté $x'$ tel que l'on puisse écrire :

$$e = x' \circ x = x \circ x'$$

(on dit que $x'$ est un *inverse* de $x$ pour l'élément neutre $e$ de l'opération $\circ$).

A partir de ces trois axiomes, on peut démontrer de très nombreux théorèmes : $e$ est nécessairement unique ; un élément ne possède qu'un seul inverse ; l'inverse de $z = x \circ y$ est égal à $z' = y' \circ x'$ etc. Là aussi se posent les questions : ce système est-il cohérent, c'est-à-dire existe-t-il au moins un groupe ? Ces axiomes sont-ils indépendants ? Deux groupes sont-ils nécessairement copies conformes l'un de l'autre ?

## Un coup d'œil sur les groupes

Les axiomes des groupes sont vérifiés par exemple par $\mathbf{Z}$ si l'on pose

$$x \circ y = x + y.$$

Ici $e = 0$ et $x' = -x$ (exemple : $3' = -3$, $(-4)' = 4$, etc.). L'associativité de l'addition n'est pas évidente ; on peut néammoins la démontrer (après avoir défini au préalable l'addition !) à partir des axiomes de Peano. $\mathbf{Z}$ est donc un groupe pour l'addition.

On démontre assez aisément l'indépendance des différents axiomes. Ainsi c) est indépendant des autres, comme on le voit en considérant **N** (au lieu de **Z**) avec la même addition ; dans **N** il n'existe pas d'élément $x$ tel que $3 + x = x + 3 = 0$ [Notons néanmoins que l'indépendance de b) par rapport à a) et c) n'a pas de sens, puisque $e$ figure dans l'énoncé de c)]. Pour démontrer l'indépendance de a) par rapport à b) et c), on construit une opération dans un ensemble à trois éléments $A = \{ e, a, b \}$ par les égalités :

$$\begin{aligned} &e \circ e = a \circ b = b \circ a = e, \\ &e \circ a = a \circ e = a, \\ &e \circ b = b \circ e = a \circ a = b \circ b = b. \end{aligned}$$

On constate alors que e est bien un élément neutre, et qu'il existe $e' = e$, $a' = b$ et $b' = a$. Pourtant cette opération n'est pas associative, puisque

$$(b \circ b) \circ a = b \circ a = e,$$

tandis que $$b \circ (b \circ a) = b \circ e = b.$$

| | $e$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ |
| $a$ | $a$ | $b$ | $e$ |
| $b$ | $b$ | $e$ | $b$ |

L'opération définie par cette table de Pythagore ne munit pas l'ensemble $A = \{ e, a, b \}$ de la structure de groupe ; mais si l'on change le $b$ rouge en $a$, $A$ devient un groupe.

Reste à étudier l'unicité éventuelle (à un isomorphisme près) d'un groupe. Tous les ensembles peaniens (définis également à partir de trois axiomes) étaient des copies de l'un d'entre eux ; on pourrait s'attendre à ce qu'il en soit de même pour les groupes. *Il n'en est rien ;* nous connaissons déjà un groupe ayant une infinité d'éléments : c'est (**Z**, $+$) [1]. Il est pourtant facile de construire des groupes finis (c'est-à-dire ayant un nombre fini d'éléments) ; par exemple l'ensemble $\{ e \}$, qui ne possède que le seul élément $e$, est un groupe si l'on définit l'opération $\circ$ par la seule égalité $e \circ e = e$ qui montre que e est neutre et que $e' = e$. De même est

1. On écrit ici le symbole de l'opération pour distinguer les différents groupes éventuellement construits sur le même ensemble.

un groupe l'ensemble $A = \{ e, a, b \}$ déjà considéré où l'on pose $b \circ b = a$ (et non pas $b \circ b = b$). C'est un groupe : il existe donc bien des groupes, et cette notion n'est pas vide de sens. Il est bien clair qu'il ne peut pas exister d'isomorphisme entre un ensemble fini tel que $A$ et un ensemble infini comme $\mathbf{Z}$.

## La méthode axiomatique

Nous sommes maintenant mieux armés pour comprendre ce qu'est la *méthode axiomatique* qui a envahi, en souvenir d'Euclide, toute la mathématique. Celle-ci est devenue un jeu symbolique où l'on étudie principalement des *structures*, c'est-à-dire ici toutes les conséquences logiques de systèmes d'axiomes définissant, les uns un ensemble bien déterminé et important (tel que $\mathbf{N}$), les autres toute une classe d'ensembles, pouvant différer sur des points capitaux mais possédant en commun toutes les propriétés démontrées à l'aide des seuls axiomes de départ (comme les groupes). Ce schéma est évidemment un peu simpliste et ne rend pas compte de toutes les recherches mathématiques ; mais il ne faut pas oublier qu'un texte isolé, comme un article de revue savante, est toujours censé s'insérer dans un traité complet où il succède, parfois par un très long cheminement, à la mise en place des structures fondamentales dont l'article en question ne traite, en fait, qu'une propriété nouvelle. Ainsi tout théorème de géométrie peut être considéré comme un chapitre particulier du livre de Hilbert.

Le point de vue que nous venons d'exposer est aujourd'hui celui du mathématicien. Les adversaires des mathématiques modernes ne contestent pas (ou plus guère) le fait que la très grande majorité des spécialistes adopte cette façon de voir; mais ils se comptent sur le problème, très différent, de l'enseignement. Doit-on utiliser la méthode axiomatique dans les lycées, à l'école primaire? Le débat est évidemment fort complexe.

Nous sommes trop peu avancés dans notre enquête, aux premières pages de ce livre, pour pouvoir porter un jugement définitif. Chaque lecteur qui n'a pas encore fait sa religion sur ce point peut au moins comprendre les deux arguments majeurs – et antagonistes – qui séparent les combattants :

*Le Puriste :* Pourquoi apprendre à nos enfants les mathématiques sous la forme que nous avons nous mêmes connue?

L'enseignement doit permettre aux étudiants d'entrer de plain-pied, s'ils le désirent, dans la mathématique qui se fait aujourd'hui et dans la recherche. Puisque celle-ci est axiomatique dans sa quasi-totalité, qu'elle le soit également à l'école.

*L'Empiriste :* Introduire les subtilités inhérentes à la notion d'axiomatique, où la vérité devient, en quelque sorte, relative, revient à troubler les jeunes intelligences, les dégoûter prématurément de notre science, sans permettre d'accroître le volume des connaissances élémentaires à acquérir sur les nombres et les figures. Ils pourront toujours adopter le point de vue « moderne » s'ils doivent devenir mathématiciens.

## Une motion nègre-blanc

Il existe heureusement un troisième point de vue, qui essaie de concilier l'honnêteté du premier et le pessimisme justifié du second. La principale vertu des mathématiques à l'école étant d'apprendre à raisonner juste (beaucoup plus qu'à acquérir, en dehors des notions courantes, des techniques trop savantes et rapidement oubliées), il faut être aussi honnête que possible, et toujours avouer clairement ce que l'on admet. Mais cette exigence doit être tempérée. Les problèmes d'existence des ensembles fondamentaux (nombres entiers, plan euclidien, nombres réels), pour lesquels il existe une intuition très forte, ne doivent pas être évoqués autrement que sous la forme vague : « nous admettrons que l'on peut raisonner mathématiquement sur les nombres 1, 2, 3, etc. ; nous admettrons que chacun d'entre nous a une idée assez précise de ce qu'est un point dans un plan, une droite, etc. » et ainsi de suite. Mais on doit dresser la liste des propriétés admises sans démonstration au fur et à mesure de leur utilisation naturelle, en choisissant des axiomes [1] assez puissants pour en diminuer le nombre jusqu'à une limite raisonnable.

Ainsi, réduisant par exemple la définition de l'ensemble des nombres réels à une dizaine de propriétés (dont la plupart, déjà valables pour les nombres rationnels, font partie de l'acquis intellectuel de tout enfant normal d'une douzaine d'années), peut-on très tôt présenter des *raisonnements*

1. Doivent être passés sous silence des axiomes trop subtils, comme ceux que nous rencontrerons en théorie des ensembles et qui ont pour but d'éviter des paradoxes qu'un jeune lycéen n'a aucune chance de rencontrer.

*rigoureux* sur des nombres dont la définition précise, très délicate, ne date que d'un siècle à peine. Ce point de vue médian, qui rejette notamment aux seuls spécialistes les problèmes d'indépendance des axiomes (peu importe qu'ils soient redondants, pour ce que nous avons à en faire ici) et, évidemment, de cohérence, est actuellement, semble-t-il, susceptible de satisfaire un assez grand nombre de protagonistes de notre tragi-comédie. C'est donc celui que nous adopterons pour ce livre, dans la mesure où il présente certains aspects pédagogiques.

### Un exemple de raisonnement axiomatique

Supposons que nous connaissions un ensemble E, une opération (notée par simple juxtaposition, comme la multiplication ordinaire) définie dans $E$, et quatre éléments $a$, $b$, $c$, $d$ de cet ensemble satisfaisant aux axiomes :

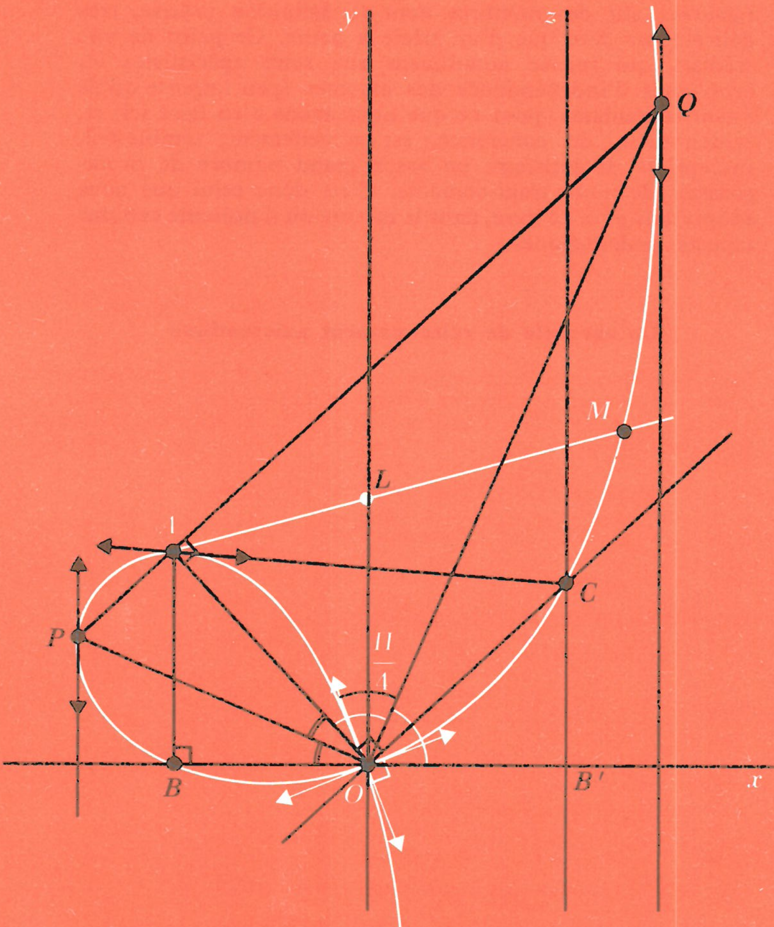
$$\begin{cases} (A) & x(yz) = (xy)z & \text{pour tous les } x, y, z \text{ de } E \\ (B) & ax = x & \text{pour tout } x \text{ de } E \\ (C) & xa = x & \text{pour tout } x \text{ de } E \\ (D) & bc = a & \\ (E) & cd = a & \end{cases}$$

Démontrons que ces axiomes impliquent $d = b$.

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $d = ad$ | ($B$, avec $x = d$) |
| (2) | $a = bc$ | ($D$) |
| (3) | $d = (bc)d$ | (1 et 2) |
| (4) | $(bc)d = b(cd)$ | ($A$, avec $x = b$, $y = c$, $z = d$) |
| (5) | $d = b(cd)$ | (3 et 4) |
| (6) | $cd = a$ | ($E$) |
| (7) | $b(cd) = ba$ | (6) |
| (8) | $d = ba$ | (5 et 7) |
| (9) | $ba = b$ | ($C$, avec $x = b$) |
| (10) | $d = b$ | (8 et 9). |

Cela peut se résumer sous la forme très symétrique :

$$d \underset{(B)}{=} ad \underset{(D)}{=} (bc)d \underset{(A)}{=} b(cd) \underset{(E)}{=} ba \underset{(C)}{=} b.$$




**Une belle figure de géométrie classique.** Elle représente la construction des éléments remarquables d'une strophoïde de foyer *A* et de point double *O*. Cette courbe est engendrée par le point *M* défini de façon que $LO = LM$, $ALM$ étant alignés. Elle passe par *A* et a deux tangentes perpendiculaires en *O*. On construit *Ox* et *Oy* (perpendiculaires) puis la projection *B* de *A* sur *Ox* ; les bissectrices de l'angle $\widehat{AOB}$ coupent la perpendiculaire en *A* à *AO* en *P* et *Q*, points où la tangente est parallèle à *Oy* ; les tangentes en *O* forment des angles de $\pi/4$ (45 degrés) avec *OP* et *OQ*. La parallèle à *Oy* passant par le symétrique *B′* de *B* par rapport à *O* est l'asymptote de la courbe qu'elle coupe en *C* ; l'angle $\widehat{AOC}$ est droit et *AC* est la tangente en *A* à la strophoïde.