Correspondances

Si un domaine semble a priori étranger à la grande vogue des ensembles, c'est celui de la fonction, c'est-à-dire l'analyse. Nous allons voir qu'il n'en est absolument rien, et que ce concept si commun qu'on ne songeait guère à le définir, après examen, a permis une unification assez extraordinaire de notions jusque-là dispersées dans toutes les mathématiques.

Ce chapitre voudrait traiter sommairement des correspondances, des relations, des applications et des opérations. Comme il arrive souvent, l'ordre dans lequel ces termes sont définis peut varier extrêmement d'un exposé à un autre. Cet arbitraire relatif n'est qu'une preuve de la grande souplesse des méthodes actuelles.

Les fonctions élémentaires, telles que celles que définissent les égalités ($y = ax^2 + bx + c$) ou ($y = \sin x$), sont telles qu'à une valeur donnée x de la variable, corresponde une valeur unique donnée par l'égalité définissant y. Les progrès de l'analyse, notamment l'étude des fonctions d'une variable complexe, ont amené au siècle dernier les mathématiciens à considérer des généralisations, où une valeur de x engendre plusieurs y à la fois. De telles « fonctions » multiformes peuvent être facilement imaginées ; dans certains problèmes, il peut être important de faire intervenir toutes les racines

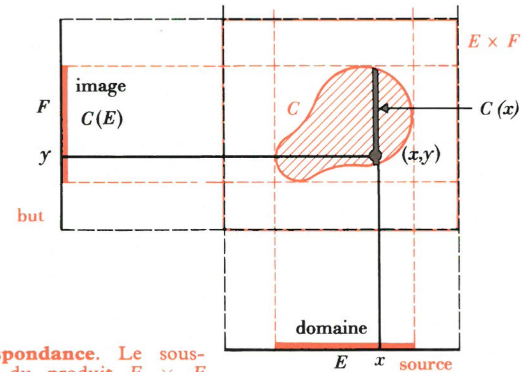
Les relations amoureuses dans Andromaque :
$\overrightarrow{xy}$ signifie " x aime y ".

carrées d'un nombre positif (on sait qu'il y en a deux qui sont opposées). Au nombre positif x, on est ainsi amené à associer l'ensemble des deux nombres $+\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$; naturellement, il n'est pas possible de noter cette opération de la façon traditionnelle $y = f(x)$, puisqu'il y a deux nombres répondant à la définition.

Une liaison assez floue : la correspondance

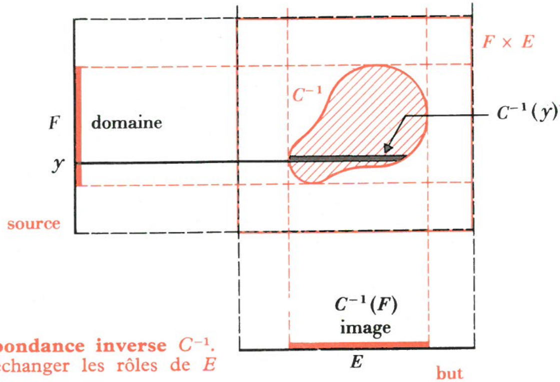
Cette utilisation des « fonctions » multiformes a mené à l'idée fondamentale de *correspondance* entre deux ensembles ; on dit aussi « relation », mais nous réserverons ici ce terme à un cas particulier. Considérons un ensemble E, dit ensemble de départ, et un ensemble F, dit ensemble d'arrivée ; E et F prennent parfois les noms de « source » et de « but ». Une correspondance C est simplement un sous-ensemble du produit cartésien $E \times F$ de la source et du but [1]. Choisissons un élément x dans E, et cherchons tous les éléments y de F tels que le couple (x, y) appartienne à C. Ces éléments y forment un sous-ensemble $C(x)$ de F, éventuellement vide, que l'on peut définir formellement par l'égalité

$$C(x) = \{\, y : y \in F, (x, y) \in C \,\}$$



Une correspondance. Le sous-ensemble C du produit $E \times F$ opère une sélection parmi les couples (x, y). Si x est donné, on note $C(x)$ l'ensemble des y tels que $(x, y) \in C$.

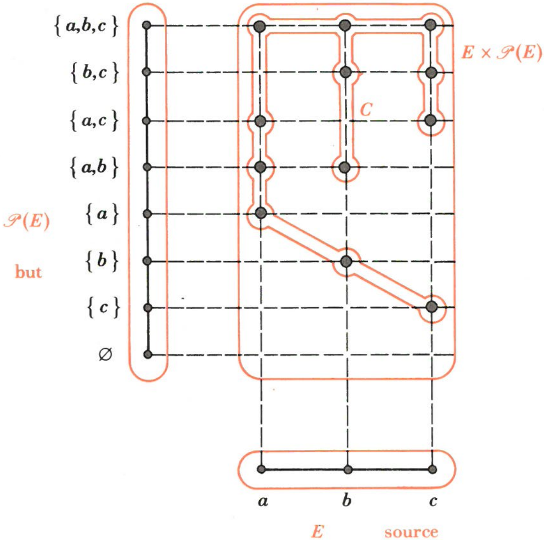
(lire comme suit : $C(x)$ est l'ensemble des y appartenant à F tels que (x, y) appartienne à C). L'ensemble des x pour lesquels $C(x)$ n'est pas vide est appelé le *domaine* de la correspondance, et l'ensemble des y pour lesquels il existe au moins un x pour lequel $y \in C(x)$, noté $C(E)$, est l'*image* de E par la correspondance C.



La correspondance inverse C^{-1}. Il suffit d'échanger les rôles de E et de F.

Précisons ceci par un exemple. E est l'ensemble des étudiants de la faculté des sciences d'Orléans ; F est l'ensemble des certificats que cette faculté est habilitée à décerner cette année. Une correspondance très simple peut être définie en écrivant que le couple (x, y) appartient à C si et seulement si l'étudiant x a été reçu au certificat y cette année. Le domaine est l'ensemble des étudiants ayant réussi à un certificat au moins ; l'image est l'ensemble des certificats ayant été effectivement décernés, et $C(x)$ est l'ensemble des certificats auxquels l'étudiant x a été reçu. On peut évidemment définir aisément la correspondance inverse (notée C^{-1}) en posant que $C^{-1}(y)$ est l'ensemble des x tels que $(x, y) \in C$: cela revient à échanger les rôles de E et de F, l'ensemble C^{-1} étant le sous-ensemble de $F \times E$ formé des couples « renversés » de C.

Un autre exemple de correspondance est fourni par un ensemble de parties $\mathscr{P}(E)$: à tout élément x de E, on peut associer l'ensemble des éléments y de $\mathscr{P}(E)$ (c'est-à-dire des sous-ensembles de E) contenant x. Cette correspondance



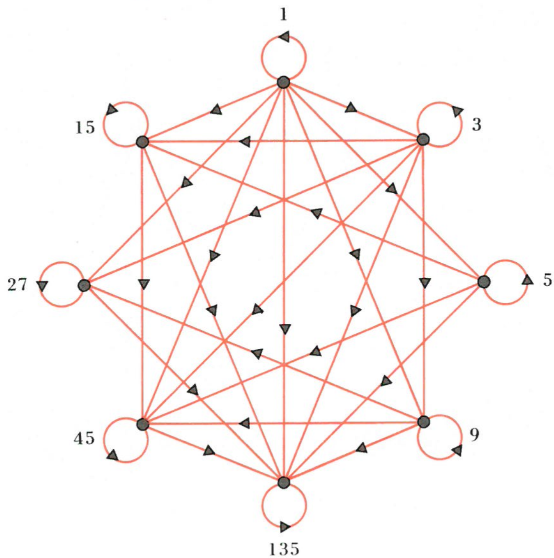
La correspondance d'appartenance (24 éléments, aux croisées des droites horizontales et verticales).
Elle est définie par le sous-ensemble de $E \times \mathcal{P}(E)$:
$C = \{ (a, \{ a \}), (a, \{ a, b \}), (a, \{ a, c \}), (a, \{ a, b, c \}),$
$(b, \{ b \}), (b, \{ a, b \}), (b, \{ b, c \}), (b, \{ a, b, c \}),$
$(c, \{ c \}), (c, \{ a, c \}), (c, \{ b, c \}), (c, \{a, b, c \}) \}.$
$C(a)$, $C(b)$ et $C(c)$ ont chacun quatre éléments.
$C^{-1}(\varnothing)$ est vide, $C^{-1}(\{ a \}) = \{ a \}$; d'une manière générale
$C^{-1}(y) = y \subset \{ a, b, c \}$.

d'appartenance (on dit traditionnellement : relation d'appartenance) est à la base même de la théorie des ensembles. La correspondance inverse associe à un élément y de $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses éléments, c'est-à-dire... y lui-même, égal ici à $C^{-1}(y)$.

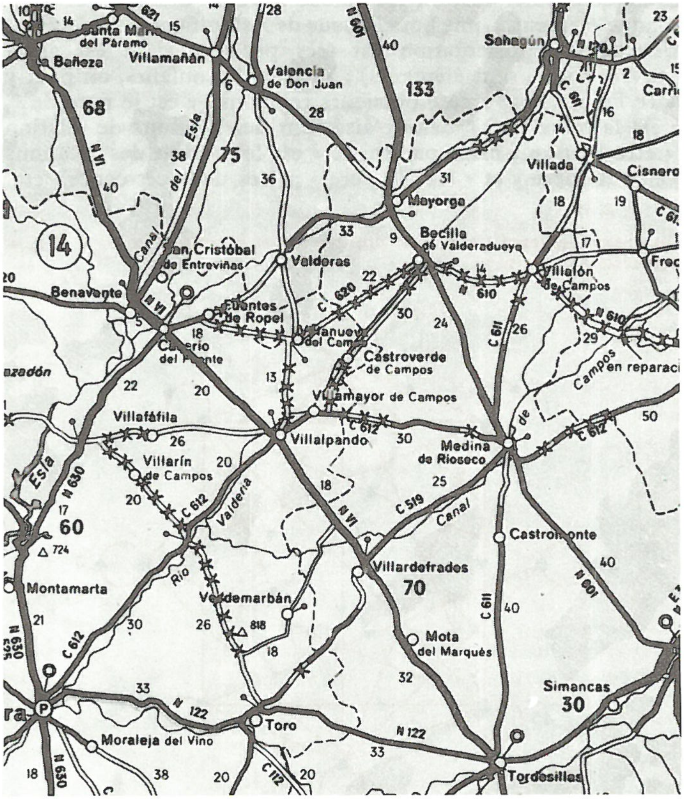
Les relations binaires et leurs représentations

Cette notion très générale possède deux cas particuliers très important : les relations binaires et les applications. Examinons rapidement la première. Une *relation binaire* (ce dernier adjectif étant généralement sous-entendu) est une correspondance entre un ensemble et lui-même. Nous supposerons donc que $E = F$. L'étude des relations est une étape fondamentale dans l'apprentissage des mathématiques modernes. Lorsque E est un ensemble fini, on dispose de nombreuses représentations graphiques d'une relation R, dont celle de *graphe orienté* : on dispose les différents éléments de E dans un plan (par exemple en les sommets d'un polygone si cela est commode), et l'on trace une flèche $\overrightarrow{xy}$ (le mot technique est « arc ») reliant x à y si et seulement si y appartient à $R(x)$ (c'est-à-dire si et seulement si $(x, y) \in R$). De tels graphes s'appliquent très bien aux relations de parenté, telles que « $y \in P(x)$ si et seulement si y est le père de x », ou « $y \in F(x)$ si et seulement si x et y ont les mêmes parents ». Dans ce dernier cas, on est amené à tracer des boucles pour chaque élément x, une boucle issue de x signifiant que $x \in F(x)$. Une telle représentation est très parlante si E est assez pauvre (six ou sept éléments) ; à l'aide de couleurs, on peut y faire figurer côte à côte plusieurs relations (y est le père de x, y est la mère de x), définir aisément des produits de relation (« être la grand-mère paternelle » est le produit des relations « être la mère » et « être le père » prises dans cet ordre), etc.

Un graphe orienté (la relation illustrée ici est la relation $(x, y) \in R$ si et seulement si x divise y).

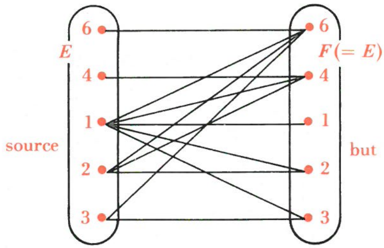


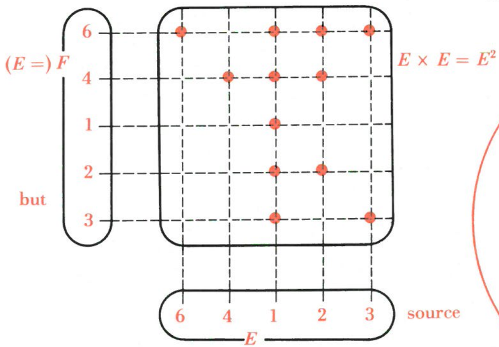
Si la relation est symétrique, c'est-à-dire si le couple (y, x) appartient nécessairement à R dès que (x, y) appartient à R, les flèches sont inutiles et on peut remplacer une paire de flèches reliant x à y et y à x par un seul trait, appelé *arête* joignant x et y, sans indication de sens. Un tel graphe est dit non orienté ou symétrique ; le meilleur exemple d'un tel graphe est une carte Michelin : E est alors l'ensemble des agglomérations notées sur la carte, et le trait représentant une route traduit la relation « on peut joindre directement x à y sans traverser d'autres agglomérations de E ».

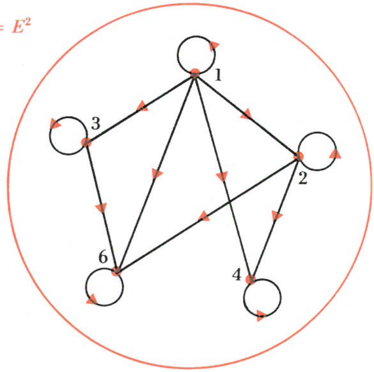


Un graphe non orienté : la carte Michelin.

La relation de divisibilité
dans l'ensemble { 6, 4, 1, 2, 3, }.
Cette relation peut être représentée de multiples façons. Par exemple :







Diagrammes et correspondances

On dispose également d'autres représentations :

– *le schéma général des correspondances :* on trace des diagrammes de Venn des deux ensembles E et F, placés respectivement à gauche et à droite de la feuille (ici $F = E$; on est donc amené à représenter deux exemplaires distincts de E) ; si (x, y) appartient à C (ici à R), on relie x, pris à gauche dans E, à y, pris à droite dans F, par un simple trait.

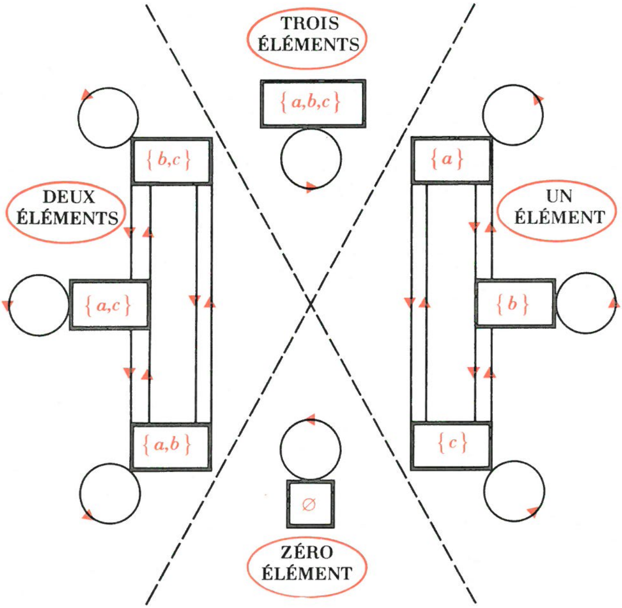
– *le schéma habituel du produit cartésien,* décrit plus haut : les éléments de E sont dessinés comme des points régulièrement placés le long d'un segment horizontal, ceux de F (ici encore F, dans le cas d'une relation, est un autre exemplaire de E) sont placés de façon analogue sur une verticale. Il ne reste plus qu'à entourer d'une frontière les éléments de la correspondance C (ici de la relation R) ; si cela est difficile, on peut marquer par exemple d'un point très fort les couples (x, y) qui constituent C (ici R), ce qui fait apparaître des nœuds dans le quadrillage.

Qu'est-ce que l'équivalence ?

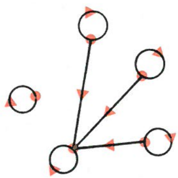
Les principales qualités d'une relation peuvent être recherchées dans les deux prototypes suivants : la relation d'*équivalence* et la relation d'*ordre*. La première est une forme affaiblie de la relation d'égalité ; donnons-en deux modèles distincts, dans des domaines très différents. Le premier modèle concerne les sous-ensembles x d'un ensemble fini donné U (ici $E = \mathscr{P}(U)$), et la relation R est l'*équipotence* : nous écrirons $(x, y) \in R$ si et seulement si x et y ont le même nombre d'éléments. Le second concerne les triangles x d'un plan P, et la relation R est la similitude : nous écrirons $(x, y) \in R$ si et seulement si x smb y, c'est-à-dire si x et y ont leurs angles égaux. Le tableau synoptique ci-dessous met en évidence les caractères essentiels de ces relations :

RÉFLEXIVITÉ	• Tout sous-ensemble x est équipotent à lui-même.	• Tout triangle x est semblable à lui-même.
SYMÉTRIE	• Si x est équipotent à y, alors y est équipotent à x.	• Si x est semblable à y, alors y est semblable à x.
TRANSITIVITÉ	• Si x est équipotent à y et si y est équipotent à z, alors x est équipotent à z.	• Si x est semblable à y et si y est semblable à z, alors x est semblable à z.

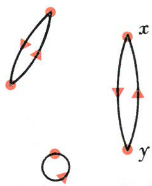
Les trois propriétés mises en lumière par ce tableau sont respectivement : la *réflexivité* (la relation R relie toujours un élément x de E à lui-même), la *symétrie* (si R relie x à y, il en est alors de même pour y et x) et la *transitivité* (si (x, y) et (y, z) appartiennent à R, il en est alors de même de (x, z)). Les deux premières sont très simples à reconnaître sur un graphe orienté : une relation réflexive crée une boucle à chaque sommet, une relation symétrique est telle qu'à tout arc xy est associé l'arc symétrique $\overrightarrow{yx}$. La transitivité est moins visible ; mais chacun de nous en connaît une forme populaire, dans le célèbre adage « les amis de nos amis sont nos amis » ; c'est une propriété puissante et assez rare (ainsi la relation



La relation d'équipotence (dans $\mathcal{P}$ ($\{a, b, c\}$)).

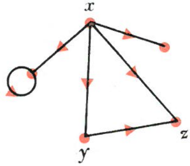


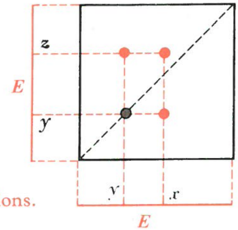
Relation reflexive



$(x,y) \in R$
implique $(y,x) \in R$

Relation symétrique

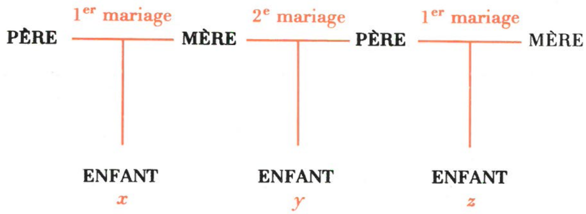




	$(x,y) \in R$
et	$(y,z) \in R$
donc	$(x,z) \in R$

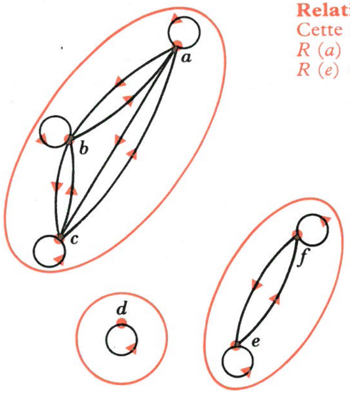
Relation transitive : deux représentations.

de voisinage, définie par le fait d'habiter à moins d'un kilomètre, n'est-elle pas transitive ; la relation « avoir un parent commun (père ou mère) » ne l'est pas non plus, comme on le voit en considérant des enfants d'un couple de divorcés et ceux issus des premiers lits).

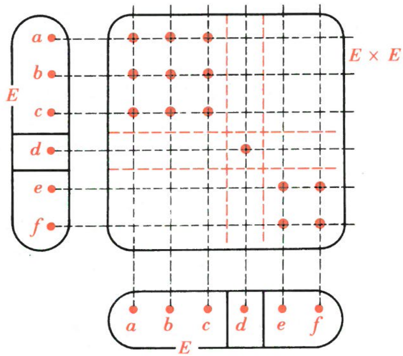


Relation non transitive, « avoir le père ou la mère en commun » : x et y ont même mère, y et z même père, et pourtant x et z ne sont pas parents. Ainsi Ernest Legouvé (noté ici x) était le fils de M. Legouvé et d'une certaine Mme Sauvais, qui eut avec le père d'Ernest Sue (notre z) une fille dénommée Flore Sue.

Le rôle des relations d'équivalence est considérable en algèbre. Une équivalence – et il nous suffira ici de retenir cette caractérisation approchée – est une égalité grossière ; l'armée, qui est une structure idéale pour des mathématiciens en mal d'exemple, considère que deux caporaux quelconques sont interchangeables, qu'un colonel en vaut un autre, etc. La relation « x a même grade que y » est un bon exemple de relation d'équivalence. Certes, Croquebol et Laguillaumette sont des individus distincts ; mais, si l'on se restreint à leur rôle militaire, ils sont parfaitement indiscernables, et il est équivalent de rencontrer l'un ou l'autre dans la cour de la caserne : leurs droits et leurs devoirs sont parfaitement identiques. Lorsque le règlement prévoit qu'un adjudant doit le respect à un capitaine, c'est une règle qui confond volontairement tous les adjudants entre eux, tous les capitaines entre eux. De la même façon, si l'on se limite à la géométrie euclidienne sans y définir d'unité de longueur privilégiée, tous les triangles équilatéraux, qui sont semblables entre eux, sont indiscernables, quelle que soit leur position dans le plan ou leur dimension.



Relation d'équivalence
Cette relation définit trois classes d'équivalence :
$R(a) = R(b) = R(c) = \{a, b, c\}$, $R(d) = \{d\}$,
$R(e) = R(f) = \{e, f\}$.



Des regroupements cohérents

Le fait de rassembler tous les éléments d'un ensemble E, dans lequel est défini une relation d'équivalence R, en des sous-ensembles réunissant les éléments équivalents, revient à réaliser une partition de E en *classes d'équivalence*. C'est ce que font les statisticiens lorsqu'ils répartissent les membres d'une population donnée (qui joue le rôle de E) suivant leur année de naissance. Une classe d'équivalence est ici une classe d'âge. Dans la classe $R(x)$ à laquelle appartient x, se trouvent tous les éléments équivalents à (étant nés la même année que) x, et rien que ceux-là. La division de E en ces classes est une manipulation très courante en mathématiques ; le résultat, c'est-à-dire l'ensemble dont les éléments sont les classes d'équivalence ainsi créées, est l'*ensemble-quotient* de E par la relation R.

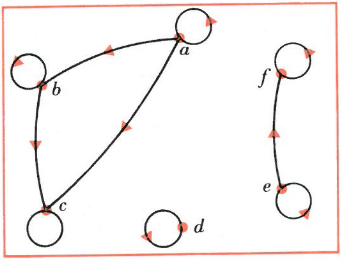
Les hiérarchies mathématiques

Une relation d'ordre présente quelques analogies avec une relation d'équivalence. En particulier c'est une relation réflexive et transitive. La différence essentielle nous sera révélée par le tableau ci-après qui énumère les caractéristiques fondamentales de deux modèles importants de relation d'ordre. Le premier concerne les sous-ensembles x d'un ensemble donné U, et la relation R est l'inclusion : nous écrirons $(x, y) \in R$ si et seulement si $x \subset y$. Le second est défini dans l'ensemble des nombres naturels x ; la relation R est la divisibilité ($(x, y) \in R$ équivaut à « x divise y », ou $y = \mathrm{k}x$).

RÉFLEXIVITÉ	• Tout sous-ensemble x est inclus dans lui-même.	• Tout nombre x se divise lui-même.
ANTISYMÉTRIE	• Si x est inclus dans y et si y est inclus dans x, alors x est égal à y.	• Si x divise y et si y divise x, alors x est égal à y.
TRANSITIVITÉ	• Si x est inclus dans y et si y est inclus dans z, alors x est inclus dans z.	• Si x divise y et si y divise z, alors x divise z.

La différence essentielle, comme on le voit, réside dans la seconde propriété : une relation d'ordre n'est pas symétrique ; bien plus, elle est *antisymétrique* (c'est le nom que l'on donne à cette propriété des relations, qui signifie bien plus que le simple fait que $(x, y) \in R$ n'implique généralement pas $(y, x) \in R$, puisqu'elle précise dans quel cas ces deux couples peuvent appartenir ensemble à R).

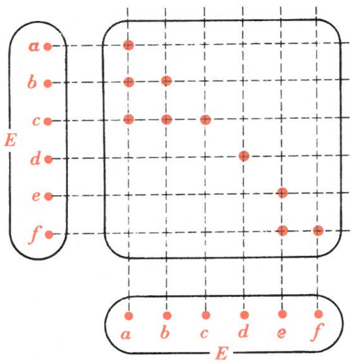
Le prototype des relations d'ordre est, évidemment, la relation « être supérieur ou égal à » dans un ensemble de nombres (entiers par exemple). On y vérifie très aisément les trois propriétés de symétrie (x est supérieur ou égal à y), d'antisymétrie (x supérieur ou égal à y et y supérieur ou égal à x impliquent x égale y) et de transitivité (x supérieur ou égal à y, lui-même supérieur ou égal à z, impliquent que x est supérieur ou égal à z). Mais de plus cet ordre est *total*, c'est-à-dire que toute paire $\{ x, y \}$ de nombres est telle que l'on a nécessairement « x supérieur ou égal à y » ou « y supérieur ou égal à x ». Les deux autres relations d'ordre citées ci-dessus ne possédaient pas cette propriété supplémentaire : par exemple 3 ne divise pas 5, et 5 ne divise pas non plus 3. L'ordre le plus général ne permet donc pas de comparer entre eux deux éléments quelconques x et y de E, mais seulement certaines paires de tels éléments : on parle alors d'ordre partiel.



Relation d'ordre partiel

$$\begin{cases} a \leqslant a,\ a \leqslant b,\ a \leqslant c, \\ b \leqslant b,\ b \leqslant c, \\ c \leqslant c, \\ d \leqslant d, \\ e \leqslant e,\ e \leqslant f, \\ f \leqslant f. \end{cases}$$

L'ordre n'est pas total, mais seulement partiel.
a et d ne sont pas comparables entre eux.



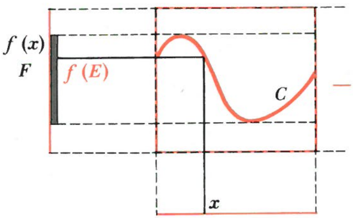
Les relations d'ordre et d'équivalence sont les relations les plus importantes, mais ce ne sont pas les seules ; citons naturellement la relation d'égalité (qui est à la fois une relation d'ordre et une relation d'équivalence), les relations fonctionnelles, celles de préordre et bien d'autres.

Un résultat paradoxal

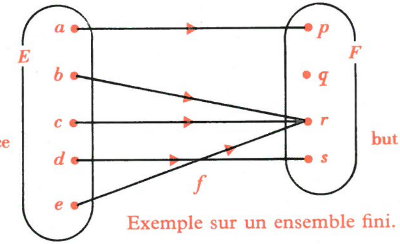
Partant d'une généralisation de la notion de fonction numérique (c'est-à-dire de fonction associant, à un nombre x, un nombre y), nous avons découvert le concept très général de correspondance entre deux ensembles E et F, puis celui de relation entre E et E. Il est curieux de montrer, incidemment, que si toute relation est une correspondance, toute correspondance peut être pratiquement confondue avec une relation. Soit en effet une correspondance C, c'est-à-dire un sous-ensemble d'un produit $E \times F$. Si l'on construit l'union $G = E \cup F$ de la source et du but, et si l'on distingue, dans $G \times G$, le sous-ensemble R des couples (x, y) tels que $x \in E$ (qui est bien inclus dans G), $y \in F$ (également inclus dans G) et que $(x, y) \in C$, il est clair que R est une relation et que $R = C$. On voit donc que la frontière entre correspondance et relation est mince. Il faut ici être très précis. Une définition formelle d'une correspondance est celle-ci : une correspondance est un triplet (E, F, C) où C est un sous-ensemble de $E \times F$. La seule différence entre la correspondance et la relation que nous venons de lui associer est que la seconde s'écrit (G, G, C), ce qui signifie que les couples intéressants (x, y) ne sont pas modifiés, mais que l'on a simplement élargis les ensembles de départ et d'arrivée jusqu'à les rendre égaux (sans modifier, évidemment, ni le domaine ni l'image de C).

Notre dernière remarque vient de nous conduire à une distinction un peu subtile entre la correspondance (ou la relation) elle-même, et le sous-ensemble C (ou R) qui nous a permis de la définir. Aussi réserverons-nous désormais le nom de correspondance (ou relation) au triplet (E, F, C) (ou (E, E, R)), l'ensemble C lui-même (ou R) étant appelé le *graphe* de la correspondance (ou de la relation). Il ne faut pas confondre ce dernier sens du mot « graphe » avec celui que nous avons donné à ce terme dans les expressions « graphe orienté » ou « graphe symétrique » d'une relation binaire dans un ensemble fini E. Le graphe considéré ici est l'ensemble des points renforcés définis dans l'une des représentations graphiques de la page 73. C'est la forme la plus générale d'une « courbe représentative ».

Application



$C(x) = \{ f(x) \}$



Exemple sur un ensemble fini.

(Les flèches ne sont pas indispensables, si la convention de placer la source E et le but F à gauche et à droite est respectée ; de tout point de E part une flèche et une seule vers F. Ici $f(E) = \{ p, r, s \} \subset\subset F$.
Nous dirons que f n'est pas surjective. De même $f(b) = f(c) = r$ entraîne que f n'est pas injective.)

Retour aux fonctions

Quittons les relations pour aborder un autre cas particulier des correspondances les plus générales. On appelle *application* f de l'ensemble E dans l'ensemble F une correspondance (E, F, C) telle que, pour tout élément x de E, l'ensemble $C(x)$ des y de F tels que $(x, y) \in C$ soit toujours un singleton. (Le domaine d'une application est donc toujours confondu avec l'espace de départ lui-même ; certains auteurs parlent de « fonction » au lieu d'application si l'ensemble $C(x)$ est, soit vide, soit un singleton.) L'unique élément de $C(x)$ se note, conventionnellement, $f(x)$.

Incontestablement, nous sommes retombés sur la vieille fonction de l'analyse. A tout élément x de E, une application associe un élément unique de F, noté $y = f(x)$. f est une sorte de machine automatique : placez à l'entrée un élément x de E, elle vous rendra à la sortie un élément y de F. Une table trigonométrique vous donne ainsi, pour tout nombre réel x, le nombre réel $y = \sin x$. La tradition voulait que l'on parlât de la fonction « $\sin x$ » ; on essaie aujourd'hui, conformément à l'esprit précis et rigoureux des mathématiques, de parler plutôt de la fonction « sin », puisque $\sin x$ est un nombre et non une fonction! Dans certains cas, malheureusement les plus nombreux, il est impossible d'exclure la lettre x (ou toute autre jouant le même rôle) de l'énoncé d'une application f. Dans ce cas, on décrira f par la phrase :

« Soit l'application f, appliquant E dans F (ou : de E dans F), définie par la transformation de x en $f(x)$ (ou : par l'égalité $y = f(x)$) ». Symboliquement, ceci s'écrit :

$$f : E \rightharpoondown F,\ x \rightharpoondown f(x), \text{ ou } x \rightharpoondown y.$$

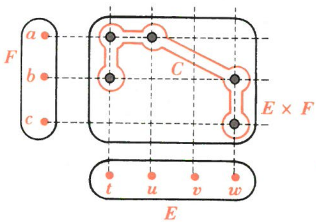
Le signe $\rightharpoondown$, parfois écrit $\mapsto$, $\ominus\!\!\to$ ou $\rightsquigarrow$, est distinct de la flèche simple (utilisée dans les écritures de limites : $x \to 0$ se lisant « x tend vers 0 »), et de la flèche double, que nous avons définie comme signifiant une implication ($x = 5 \Rightarrow x > 0$). Certains préfèrent écrire, pour une raison issue de la notion de produit d'applications, $f(x) \leftarrow x$ au lieu de $x \rightharpoondown f(x)$.

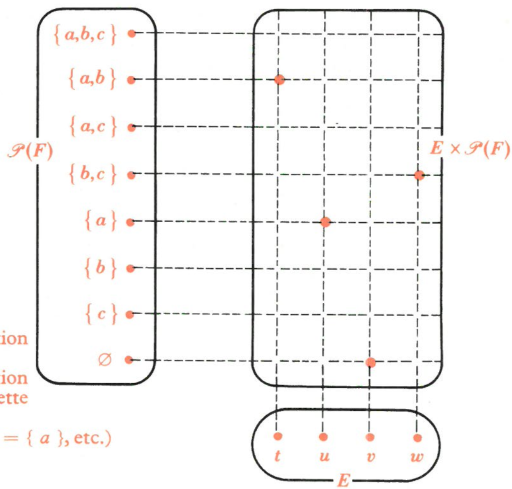
Contrairement à ce que l'on pense parfois, il n'est pas du tout nécessaire, même pour une fonction numérique, de connaître explicitement un assemblage $f(x)$ de fonctions simples, telles que sommes, produits, fonctions trigonométriques, etc., pour définir f. L'habitude de manipuler des fonctions définies par de telles égalités, comme $y = \sqrt{x}$, $y = \sin x$ ou $y = x^2 + 1$ fait tenir pour bizarres des fonctions comme la fonction de Dirichlet, définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, par les implications :

$$(x \text{ est rationnel} \Rightarrow f(x) = 1),\ (x \text{ est irrationnel} \Rightarrow f(x) = 0).$$

Une telle fonction est pourtant tout aussi légitime que $\sqrt{x}$, et il en existe de bien plus complexes encore.

Correspondance et application





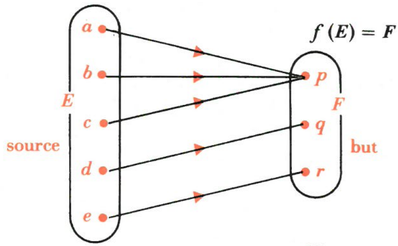
(E, F, C) n'est pas une application ($C(v) = \varnothing$, $C(t) = \{a, b\}$).
Mais il existe une application $(E, \mathcal{P}(F), A)$ équivalente à cette correspondance :
($t \rightharpoondown C(t) = \{a, b\}$; $u \rightharpoondown C(u) = \{a\}$, etc.)

L'ordre qui nous a mené de correspondance en application pourrait laisser légitimement supposer, comme nous l'avons écrit, que la première notion est beaucoup plus générale que la seconde. Il n'en est pourtant rien. Pour définir une correspondance (E, F, C), il suffit en effet de considérer l'application $(E, \mathscr{P}(F), A)$ qui, à tout élément x de E, associe un élément unique Y de $\mathscr{P}(F)$ (c'est-à-dire un sous-ensemble de F) tel que $Y = C(x)$ soit l'ensemble des $y \in F$ tels que $(x, y) \in C$. Les correspondances, les relations et les applications sont donc trois volets équivalents en généralité d'une même opération, que l'on peut considérer d'un point de vue dynamique (en donnant priorité à l'application, qui transforme un x en un y), ou d'un point de vue statique et sélectionniste (si l'on choisit l'aspect correspondance ou relation, où si l'on isole un certain sous-ensemble d'un produit cartésien). L'ordre que nous avons choisi dans ce chapitre est plus ensembliste puisque toutes nos définitions reposent sur la considération de sous-ensembles de $E \times F$.

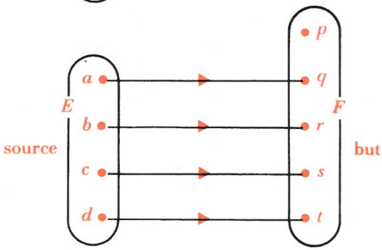
Combien de solutions ?

Les questions les plus importantes au sujet des applications sont soulevées par le problème très général de la résolution des équations. Donnons-nous une application f de E dans F, et un élément y de F. Résoudre l'équation $f(x) = y$, c'est rechercher dans E tous les éléments x satisfaisant à cette égalité, éléments formant l'ensemble noté $f^{-1}(y)$ (cf. page 69).

Si y n'appartient pas à l'image $f(E)$ de E par f, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de F qui sont les transformés par l'application f d'un élément au moins de E, l'équation est alors dite impossible : il n'existe pas de x répondant à la question. D'où l'intérêt des applications *surjectives*, ou encore surjections : ce sont les applications telles que $f(E)$ et F coïncident exactement. En d'autres termes, quelque soit y dans F, l'équation $f(x) = y$ a *au moins* une solution : ou encore, quel que soit y, l'ensemble $f^{-1}(y)$ n'est pas vide. On peut naturellement rendre surjective toute application par une amputation artificielle : il suffit de soustraire de F l'ensemble $(F - f(E))$, le résultat étant naturellement $f(E)$ lui-même. En toute rigueur, l'application $f = (E, F, C)$ et la surjection que nous venons d'obtenir, soit $f' = (E, f(E), C)$ sont généralement distinctes, mais la différence est tellement mince que l'on confond pratiquement souvent f et f'.



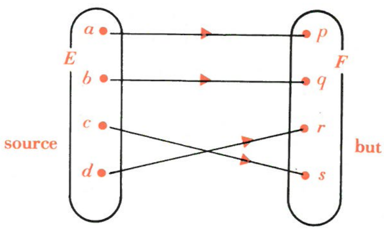
Surjection
(application de E sur F puisque de tout point de E part une flèche unique ; en tout point de F arrive au moins une flèche).



Injection
(de tout point de E part une flèche unique ; en tout point de F arrive au plus une flèche).

Les applications pour lesquelles l'équation $y = f(x)$ possède une solution *au plus* sont dites *injectives*, ou unijectives (on dit encore : injections). Elles sont telles que l'ensemble $f^{-1}(y)$ est, soit vide (si y n'appartient pas à $f(E)$), soit un singleton (si y appartient à $f(E)$). En d'autres termes encore, il faut et il suffit que l'on ait $x = x'$ pour que soit vérifiée l'égalité $f(x) = f(x')$. La correspondance inverse C^{-1} permet alors de définir une application de $f(E)$ dans E, application notée naturellement f^{-1}, et définie par l'égalité

$$x = f^{-1}(y) \text{ si et seulement si } y = f(x).$$



Bijection
(de tout point de E part une flèche unique ; en tout point de F arrive une flèche unique).

Des modèles démographiques, familiaux, et arithmétiques

Donnons quelques exemples (non mathématiques, mais concrets et donc naïfs) d'applications :

– L'application qui, à tout être humain x, associe son père y. C'est une application de H (ensembles des hommes et des femmes vivant ou ayant vécu sur terre) dans lui-même. Elle n'est ni surjective (car des femmes ne peuvent être le père d'un humain x), ni injective (puisqu'il existe des frères et des sœurs).

– L'application qui, à tout Français, associe son numéro de sécurité sociale. Elle est injective (deux individus différents ont des numéros différents), mais non surjective, si l'on considère que l'ensemble d'arrivée est l'ensemble de tous les numéros que l'on peut écrire avec des lettres, des chiffres et des espacements sans limitation de longueur. La situation mouvante de la population fait d'ailleurs en sorte qu'il est impossible de connaître, à un instant donné, sa composition et donc de rendre surjective cette application en restreignant convenablement l'ensemble F.

– L'application qui, à tout être humain, associe son sexe. Cette application, évidemment non injective, est une surjection dans la paire $S = \{$ masculin, féminin $\}$. Lorsque l'on considère une application surjective de E dans F (alors égal à $f(E)$), il suffit de dire que f est une application de E *sur* F pour exprimer cette particularité.

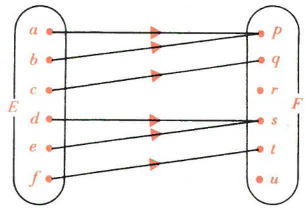
– L'application qui, à un élément x de l'ensemble E des Français(es) marié(e)s, associe son conjoint y. C'est une application *bijective* (bijection), encore appelée correspondance biunivoque, c'est-à-dire une application à la fois injective (deux personnes ayant le même conjoint à un moment donné ne peuvent qu'être confondues) et surjective (tout(e) marié(e) est le conjoint de quelqu'un). Cette application bijective possède deux propriétés particulières intéressantes : elle est *involutive* (le conjoint du conjoint de x est x, c'est-à-dire que l'application $y = \text{conj}(x)$ est confondue avec son application inverse) ; d'autre part, étant une application bijective de E sur E lui-même, ce qui est exceptionnel, elle reçoit le nom de *permutation* (ou substitution) de E lui-même.

Sortant du domaine de la parenté pour revenir aux mathématiques elles-mêmes, il est très facile de donner des exemples triviaux d'applications possédant des caractéristiques particulières :

Décomposition canonique d'une application

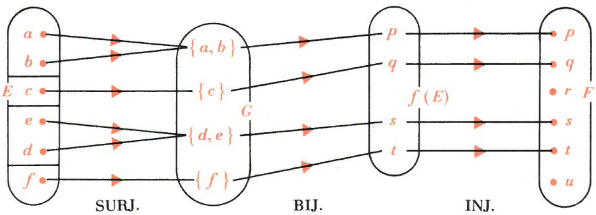
Soit f définie par le tableau (et le graphe) :

E	a	b	c	d	e	f
F	p	p	q	s	s	t



On peut considérer f comme le produit successif de trois applications :

- une *surjection* de E sur un certain sous-ensemble G de $\mathscr{P}(E)$ [à tout élément x de E on associe l'ensemble des x' de E tels que $f(x) = f(x')$] ;
- une *bijection* de cet ensemble G sur l'ensemble $f(E)$;
- une *injection* de $f(E)$ dans F :



G n'est autre que l'ensemble-quotient de E par la relation d'équivalence :

$$(x, x') \in R \text{ si et seulement si } f(x) = f(x').$$

On note la succession des trois applications par le diagramme :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(SUR)"'] & F \\ G \arrow[r, "(BIJ)"'] & f(E) \arrow[u, "(INJ)"'] \end{tikzcd}$$

E et G sont presque confondus si f est *injective* ; en effet G est alors l'ensemble

$$G = \{ \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \dots \}$$

alors que $E = \{ a, b, c, \dots \}$.

F et $f(E)$ sont confondus si, et seulement si, f est *surjective*.

– L'application qui, à un nombre naturel x, associe le nombre $x^+ = x + 1$. C'est une application injective de $\mathbf{N}$ dans lui-même, mais non surjective ($0 \notin f(\mathbf{N})$).

– L'application qui, à 0 associe 0, et qui, à un nombre naturel x associe le nombre $x^- = x - 1$ pour $x \neq 0$. C'est une application surjective, non injective (car $0 = f(0) = f(1)$) de $\mathbf{N}$ sur lui-même.

– L'application qui, à 0 et 1 associe respectivement 0 et 1, et qui, à tout nombre naturel x au moins égal à 2 associe le plus petit diviseur premier de x (ainsi $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(21) = 3$ et ainsi de suite). Cette application n'est ni surjective (l'équation $f(x) = 4$ n'a aucune solution) ni injective (puisque tous les nombres pairs sont tels que $f(x) = 2$).

– L'application qui, à tout nombre naturel pair associe son successeur x^+ et qui, à tout nombre impair, associe son prédécesseur x^-. Cette application est bijective ; c'est donc une permutation de $\mathbf{N}$. Elle est également involutive.

– L'application qui, à tout cercle de rayon l d'un certain plan, associe son centre. C'est une bijection de l'ensemble de ces cercles sur le plan lui-même ; elle n'est pas involutive et ce n'est pas une permutation, puisque F est distinct de E [1].

Les dénombrements

Une partie très intéressante des mathématiques, qui a de nombreuses applications (en sciences humaines, en probabilités et statistiques, en économétrie par exemple) est la *combinatoire*, qui étudie les applications entre ensembles finis. On y montre par exemple que, si E et F sont finis et possèdent respectivement m et n éléments, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une bijection de E sur F est que m soit égal à n (on dit alors que E et F sont équipotents) ; une condition pour qu'il existe une injection de E dans F (respectivement une surjection de E sur F) est que m soit inférieur (respectivement supérieur) ou égal à n. Toute application injective ou surjective de E dans E est nécessairement bijective, ce qui est évidemment faux si l'ensemble E est infini.

1. Bien que les cercles soient formés de points du plan F, l'ensemble qu'ils forment est un ensemble d'ensembles de points, et non pas un ensemble de points : nous connaissons bien cette distinction fondamentale.

Dénombrements des applications de E (m éléments) dans F (n éléments)

$n \backslash m$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	16	32
3	3	9	27	81	243
4	4	16	64	256	1024
5	5	25	125	625	3125

Applications générales :
formule n^m.

$n \backslash m$	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0
3	3	6	6	0	0
4	4	12	24	24	0
5	5	20	60	120	120

Applications injectives :
formule $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$.

$n \backslash m$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	0	2	6	14	30
3	0	0	6	36	150
4	0	0	0	24	240
5	0	0	0	0	120

Applications surjectives : formule de récurrence

$$S_n^m = n\left(S_n^{m-1} + S_{n-1}^{m-1}\right)$$

$n \backslash m$	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	0	2	0	0	0
3	0	0	6	0	0
4	0	0	0	24	0
5	0	0	0	0	120

Applications bijectives : formule n ! (si $m = n$) ou 0 (si $m \neq n$).

Les applications de E dans F forment un ensemble noté F^E. Si E et F sont finis, F^E possède exactement n^m éléments, ce qui justifie la notation F^E. Si m est inférieur ou égal à n, il existe parmi ces n^m applications des applications injectives, au nombre de

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1).$$

Ce nombre, souvent appelé nombre d'arrangements de n éléments pris m à m, se calcule [1] ainsi : on considère tous les nombres naturels strictement supérieurs à $(n-m)$ et inférieurs ou égaux, à n, et on effectue leur produit. Si E est égal à F, on obtient ainsi le nombre des permutations de E sur lui-même, que l'on note $n!$ (factorielle n), égal à

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1.$$

1. Le calcul du nombre des éventuelles surjections de E sur F est beaucoup plus compliqué, et fait intervenir une famille d'entiers appelés « nombres de Stirling ».

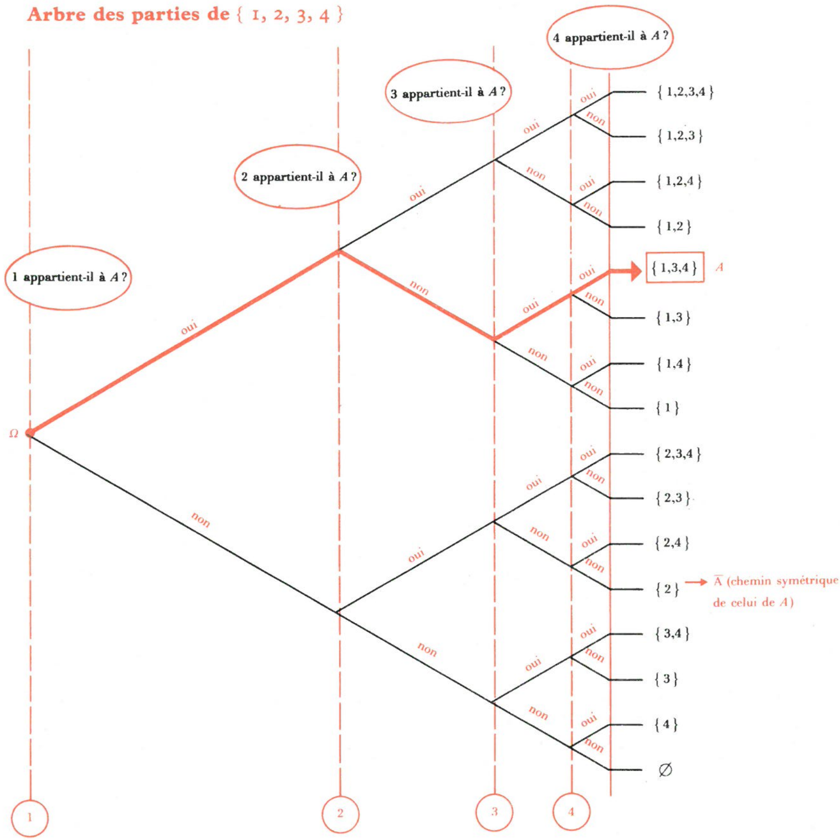
L'arbre des parties de E

Si E est un ensemble fini, le nombre n de ses éléments est appelé son *cardinal*. Il est facile d'établir une bijection entre l'ensemble des parties $\mathscr{P}(E)$ et l'ensemble des applications de E dans l'ensemble $\{0, 1\}$: à chaque ensemble A inclus dans E, on associe l'application f_A de E dans $\{0, 1\}$ définie par les implications :

$$(x \in A \Rightarrow f_A(x) = 1) \quad \text{et} \quad (x \notin A \Rightarrow f_A(x) = 0).$$

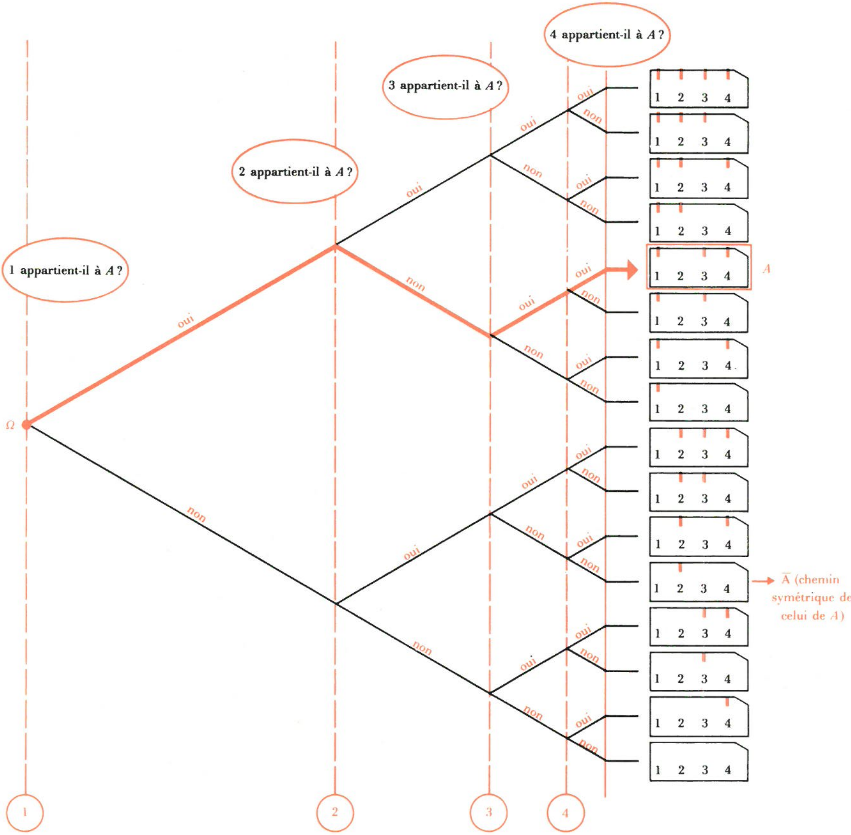
Cette application est l'application caractéristique de A dans E. Il est facile de voir qu'à deux ensembles distincts A et B correspondent deux applications distinctes, et qu'à toute application de E dans $\{0,1\}$ correspond un ensemble A.

Arbre des parties de $\{1, 2, 3, 4\}$



Cette correspondance biunivoque est particulièrement bien mise en évidence par l'*arbre* suivant : on chemine de la gauche, en partant du point Ω, vers la droite, en prenant n décisions successives (que l'on peut très bien confier à un calculateur artificiel) ; il s'agit de numéroter de 1 à n les éléments de E, et de répondre aux n questions du type

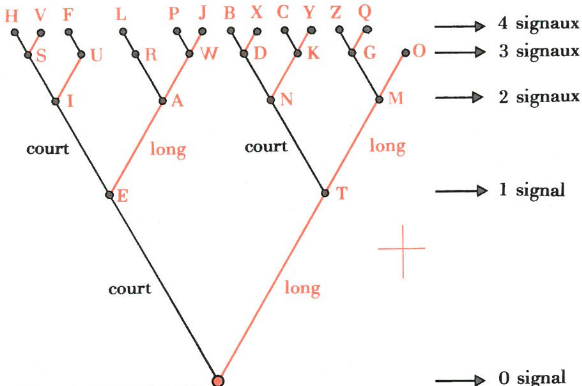
« l'élément de numéro k appartient-il à A ? »



L'ensemble des parties de { 1, 2, 3, 4 } en cartes perforées : une carte possède 4 emplacements où l'on peut perforer : la perforation « x » équivaut à la proposition « x appartient à A ». Il existe $2^4 = 16$ types de cartes possibles.

En cas de réponse positive, on choisit, au k-ième carrefour que l'on rencontre, la branche qui monte ; sinon on descend jusqu'au carrefour suivant, et ainsi de suite. Ce déplacement sur un arbre conduit, suivant le sous-ensemble A de E que l'on a choisi, à l'une des extrémités de droite de l'arbre. Le schéma ci-dessus représente ainsi le cheminement associé au sous-ensemble $\{1, 3, 4\}$ de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. La branche inférieure du V couché qui borde l'arbre correspond à l'ensemble vide, la branche supérieure à l'ensemble E lui-même.

Il est dès lors très facile de dénombrer l'ensemble fini $\mathscr{P}(E)$; nous voyons qu'il possède 2^n éléments. D'un certain point de vue, que nous évoquerons plus loin, l'ensemble $\{0, 1\}$ n'est autre que le nombre 2 lui-même (aussi paradoxal que cela puisse paraître au premier abord) ; l'ensemble des applications de E dans $2 = \{0, 1\}$ est donc noté 2^E. Aussi l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ est-il parfois écrit 2^E.



A •–	J •–––	S •••
B –•••	K –•–	T –
C –•–•	L •–••	U ••–
D –••	M ––	V •••–
E •	N –•	W •––
F ••–•	O –––	X –••–
G ––•	P •––•	Y –•––
H ••••	Q ––•–	Z ––••
I ••	R •–•	

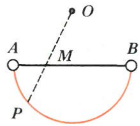
Arbre représentant les traductions en morse des 26 lettres de l'alphabet : s'élever sur une branche de gauche représente un point (court) ; sur une branche de droite représente un tiret (long). Les quatre possibilités non encore utilisées (· · — —, · — · —, — — — ·, — — — —) peuvent être associées à d'autres signes que des lettres (en fait · · — — = ü, · — · — = â, — — — · = ô, — — — — = ch)

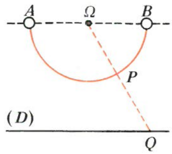
a) $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ est équipotent à $\mathbf{N}$:
A tout couple (a, b) de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, on associe le nombre $x = f(a, b) = 2^a(2b + 1) - 1$. C'est une bijection, comme le montre ce tableau

a \ b	0	1	2	3	4 ...	
0	0	2	4	6	8 ...	(progression de raison 2)
1	1	5	9	13	17 ...	(» » 4)
2	3	11	19	27	35 ...	(» » 8)
3	7	23	39	55	71 ...	(» » 16)
4	15	47	79	111	143 ...	(» » 32)

(On obtient chaque ligne en doublant la précédente et en ajoutant 1 ; chaque nombre finit par trouver sa place dans le tableau.)

b) Un intervalle est équipotent à une droite.
On montre d'abord qu'il est équipotent à un demi-cercle.
D'autre part, il existe une bijection entre le demi-cercle AB (extrémités exclues) et la droite D.



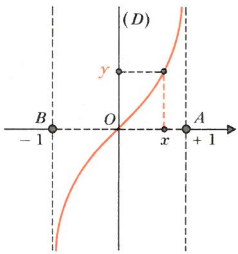


Il existe une bijection, définie par un alignement, entre les points M de AB (extrémités exclues) et les points P du demi-cercle AB.

• On peut aussi réaliser cette bijection entre AB et (D) en prenant (D) comme axe Oy, A et B comme points de coordonnées 1 et -1 : la bijection est définie par le graphe de l'application

$$y = \frac{x}{1 - |x|},$$

restreinte aux valeurs de x $(-1 < x < +1)$.



c) L'ensemble des nombres algébriques est équipotent à celui des nombres rationnels positifs non nuls $\mathbf{Q}^\star$ (donc à $\mathbf{N}$).
Un *nombre algébrique* ω est l'une des racines (réelles ou complexes) d'une équation à coefficients entiers ; soit une telle équation
$P = a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n = 0$ $(a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}, \ldots, k \in \mathbf{Z})$.
Au polynôme P on associe le nombre rationnel non nul

$$r = 2^a 3^b 5^c 7^d 11^e \ldots p^k$$

où p est le n-ième nombre premier impair (exemple : à $1 - 2x^2 + x^3$ est associé $r = 2^1 3^0 5^{-2} 7^1 = (7 \times 2) : 25$). Cette application est une bijection. Comme une équation a un nombre fini de racines, on peut facilement construire une bijection de l'ensemble des nombres algébriques dans celui des rationnels positifs non nuls. Une construction analogue à celle du a) montre que ce dernier est dénombrable.

La théorie des cardinaux

L'utilisation systématique de l'application caractéristique d'un ensemble conduit aisément aux formules suivantes (rappelons que n est ici le cardinal de l'ensemble E dont on considère les sous-ensembles A et B ; la notation card A, ou encore $| A |$, est évidente) :

$$\begin{cases} \text{card } (E - A) = \text{card } \bar{A} = n - \text{card } A \\ \text{card } (A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card } (A \cap B) \\ \text{card } (A - B) = \text{card } A - \text{card } (A \cap B) \\ \text{card } (A \Delta B) = \text{card } A + \text{card } B - 2 \text{ card } (A \cap B) \end{cases}$$ [1].

Les propriétés de base des cardinaux finis sont les suivantes :

– card $\varnothing = 0$;

– le cardinal d'un singleton est 1 ;

– le cardinal de la réunion de deux ensembles disjoints (d'intersection vide) est la somme de leurs cardinaux ; On peut déduire de ces axiomes toute la théorie des cardinaux, et même définir ainsi l'ensemble **N** et l'arithmétique.

Cette théorie peut s'étendre, non sans difficultés, aux ensembles infinis. Nous n'en donnerons qu'un très bref aperçu. S'il existe une injection (mais aucune bijection) de l'ensemble A dans l'ensemble B, nous noterons ceci card A $<$ card B (sans pour autant définir ici le nombre *transfini* card A, ce qui serait trop complexe) ; s'il existe une bijection (si A et B sont *équipotents*), nous écrirons card A = card B ; s'il existe une surjection (mais aucune bijection), nous poserons card A $>$ card B. On peut montrer :

– que card A $<$ card B implique card B $>$ card A et réciproquement (immédiat) ;

– que, pour tout ensemble A, on a card A $<$ card $\mathcal{P}(A)$; ce théorème (Cantor-Bernstein) est relativement simple à démontrer [2];

---

1. Pour démontrer ces formules, il suffit d'utiliser les remarques suivantes, valables pour tous les ensembles ; si f et g sont les applications caractéristiques de A et de B, celles de $(E - A)$, $(A \cap B)$, $(A - B)$, $(A \cup B)$ et $(A \Delta B)$ sont respectivement $1 - f$, fg, $f(1 - g) = f - fg$, $f + g - fg$ et $f + g - 2fg$, ce qui se vérifie en revenant aux définitions.

2. L'existence de l'injection est triviale (associer à l'élément a le singleton $\{ a \}$) ; s'il existait une bijection, donc une surjection f de A sur $\mathcal{P}(A)$, considérant l'ensemble B des éléments x de A tels que x n'appartienne pas à

– que card $A <$ card B et card $B <$ card C impliquent card $A <$ card C (immédiat) ;

– qu'étant donné deux ensembles A et B, l'une (et l'une seulement) des trois relations ci-dessous est vraie :

$$\begin{cases} \text{ou bien card } A < \text{card } B \\ \text{ou bien card } A = \text{card } B \\ \text{ou bien card } A > \text{card } B. \end{cases}$$

Des problèmes délicats

Toutes ces propriétés montrent, en somme, que la relation « il existe une injection de A dans B » est une relation d'ordre total, et qu'il n'existe pas de cardinal supérieur à tous les autres (puisqu'on peut toujours dépasser un cardinal donné en construisant un ensemble de parties adéquat). La dernière proposition résulte de deux théorèmes. Le premier affirme que s'il existe une injection de A dans B (donc si card $A \leqslant$ card B) et une injection de B dans A (donc si card $A \geqslant$ card B), on peut alors construire une bijection de A sur B (d'où card $A =$ card B) ; ce théorème (Schröder-Bernstein) permet de donner le nom de relation d'ordre à la relation « il existe une injection de A dans B », puisqu'il en démontre le caractère antisymétrique ; il est assez difficile à démontrer si A et B sont infinis. Le second concerne la « totalité » de l'ordre et affirme que deux ensembles quelconques sont toujours comparables. Sa démonstration générale exige un axiome, connu sous le nom d'axiome du choix, sur lequel nous reviendrons. C'est un résultat théorique d'une grande importance, mais d'un intérêt pratique assez mince !

Une extension de plus

Notre synthèse, qui a déjà englobé les correspondances, les relations et les fonctions, n'a pas besoin d'être élargie aux « fonctions de plusieurs variables » de l'analyse. En effet,

---

l'ensemble $f(x)$, on montrerait qu'il existe alors un élément b dans A solution de l'équation $f(b) = B$. Mais les hypothèses « b appartient à B » et « b n'appartient pas à B » conduisent toutes deux à une contradiction. Ceci prouve qu'il n'existe pas d'ensemble E de tous les ensembles, puisque l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E serait tel que card $\mathscr{P}(E) \leqslant$ card E. Ce résultat, connu sous le nom de paradoxe de Russell (l'extravagant et subtil pacifiste), eut une grosse importance historique, en mettant l'accent sur les insuffisances d'une théorie naïve des ensembles.

on entend par ce terme de fonction à plusieurs variables (deux par exemple), une fonction du genre de celle que définit la formule :

$$f(x, y) = xy + x - y + 1.$$

C'est en quelque sorte une machine à deux entrées (une pour x, une autre pour y) et à une seule sortie (pour $z = f(x, y)$). Or le langage ensembliste ramène immédiatement ces fonctions généralisées aux applications simples. Si x ne prend que des valeurs d'un ensemble A et y des valeurs d'un ensemble B, on peut considérer f comme une application définie sur un certain sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$, ce qui s'incorpore parfaitement à la théorie générale. Avec quelques difficultés, on peut même traiter ainsi des fonctions à une infinité de variables comme des applications ordinaires!

Mais cette synthèse, déjà très riche, englobe par surcroît ce qui est notre premier contact, en général, avec les mathématiques : les *opérations*. Ce concept est issu directement des quatre opérations de l'arithmétique. En voici une formulation relativement restreinte : une opération $\circ$ est un processus qui permet d'associer, à tout couple (x, y) d'éléments d'un certain ensemble E, un troisième élément de E noté

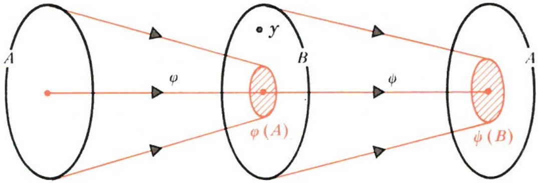
$$z = x \circ y$$

(ex. : $x + y$ ou xy ou x^y pour des nombres naturels ; $x \cup y$ ou $x \cap y$ pour des ensembles, etc.). Cette définition peut être élargie de la façon suivante. Considérons trois ensembles E, F et G. On appelle opération une application de l'ensemble $E \times F$ dans G (c'est-à-dire une application « à deux variables »). Le cas le plus simple est naturellement celui où $E = F = G$; il s'agit alors d'une opération interne dans E (exemple : l'addition et la multiplication dans $\mathbf{N}$). Mais on est amené, dans certains cas, à considérer que $E = G \neq F$ (exemple : le produit d'un vecteur du plan par un nombre est un vecteur) ; il s'agit alors d'une opération externe, dont l'origine est ménagère [1], puisqu'on multiplie couramment, sur les marchés, des francs par des kilos pour obtenir des francs!

---

1. On considère aussi le cas $E = F \neq G$ (exemples : le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre, et non un vecteur ; de façon plus élémentaires, le produit de deux longueurs est une aire, et non une longueur).

Supposons qu'il existe une injection φ d'un ensemble A dans un ensemble B supposé disjoint de A, ($A \cap B = \varnothing$; cette supposition n'est pas gênante, car on pourrait toujours remplacer éventuellement B par un ensemble équipotent B' convenable), ainsi qu'une injection ψ de B dans A. Nous allons construire effectivement une bijection θ de A sur B.

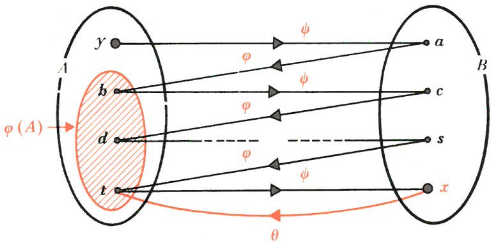


Donnons-nous un élément arbitraire x dans A ; nous poserons $\theta(x) = \varphi(x)$, sauf dans un cas : s'il existe un élément y de $B - \varphi(A)$ (c'est-à-dire un élément de B qui n'est l'image, par φ, d'aucun élément de A) tel que x soit l'image de y dans une chaîne finie où alternent φ et ψ :

$$\begin{cases} a = \psi(y),\ b = \varphi(a),\ c = \psi(b),\ d = \varphi(c),\ e = \psi(d),\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ s = \psi(r),\ t = \varphi(s),\ x = \psi(t). \end{cases}$$

Nous poserons alors $\theta(x) = t = \psi^{-1}(x)$.

Il est facile de montrer que θ est une bijection.



Donnons un exemple :

$A = [0, 1[$ (ensemble des x tels que $0 \leqslant x < 1$),

$B = [0, 1]$ (ensemble des x tels que $0 \leqslant x \leqslant 1$).

On peut prendre $\varphi(x) = x$, $\psi(y) = y/2$, d'où $\theta(x) = x$ sauf pour les éléments de l'ensemble

$$\{ 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \ldots \}$$

pour lesquels $\theta(x) = 2x$ $\quad$ ($\theta(1/2) = 1$, $\theta(1/4) = 1/2$, etc...)

Peut-on tout ramener aux ensembles ?

Ce qui est extraordinaire, c'est que l'on peut déduire, du concept d'opération, celui de correspondance ! Si l'on veut définir une correspondance (E, F, C), il suffit en effet de la considérer comme une opération de $E \times F$ dans l'ensemble $\{ 0, 1 \}$, définie par les implications :

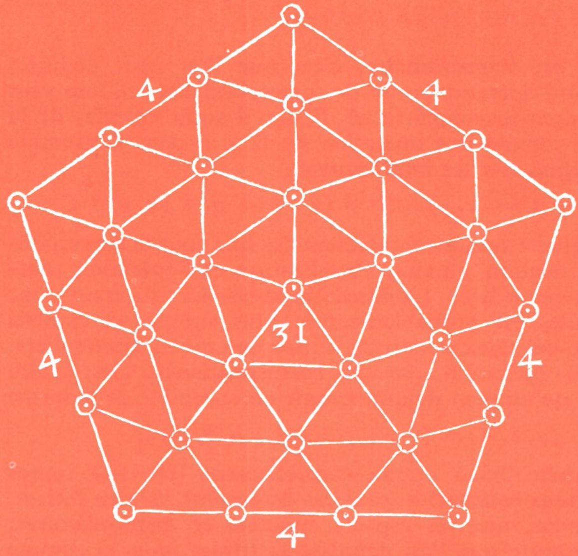
$$(x \circ y = 1 \Rightarrow (x, y) \in C) \text{ et } (x \circ y = 0 \Rightarrow (x, y) \notin C).$$

Ainsi les quatre notions fondamentales que sont la correspondance, la relation binaire, l'application et l'opération sont-elles étroitement liées. La démarche suivie ici (qui n'est donc pas la seule) est probablement la plus simple, et ramène finalement ces quatre notions à des ensembles particuliers. Ainsi une opération est une correspondance, c'est-à-dire un triplet, qu'on peut définir comme un ensemble de la forme

$$(a, b, c) = \{ \{ a \}, \{ a, b \}, \{ a, b, c \} \}.$$

Le mathématicien oublie naturellement très vite toutes ces définitions enchâssées (sauf cas de besoin), et n'en retient, heureusement, que les aspects concrets et manipulatoires. Peu lui importe que l'on définisse le triplet (a, b, c) comme nous venons de le faire, ou (ce qui présente quelques avantages minimes) comme le couple (d, c) où $d = (a, b)$. La seule chose qui compte, et c'est à démontrer cela que nous nous sommes attachés tout au long de ce chapitre abstrait, c'est que les notions mathématiques courantes peuvent se ramener aujourd'hui à la théorie des ensembles [1].

1. Il faut se garder, en une matière aussi délicate, de prendre des positions trop tranchées. Certains récusent une affirmation aussi péremptoire en adoptant une position « intuitionniste » qui n'est pas sans valeur et contestent une telle hégémonie des ensembles dans certains domaines. D'autres encore tentent de dépasser cette théorie elle-même ; les recherches dans cette voie sont très intéressantes et risquent de créer une nouvelle évolution importante. Ce qui ne sera pas remis en question en tout cas, c'est l'abstraction de plus en plus poussée de la mathématique, quel qu'en soit par la suite le système de fondations. On ne pourra plus accepter de considérer la notion de fonction comme une notion première qui n'a pas besoin d'être définie, etc.



Les nombres Polygones centraux quarrez par ordre font tels, 1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, &c.

Les nombres Polygones centraux Pentagones par ordre font tels, 1, 6, 16, 31, 51, 76, 106, &c.