

Chapitre 1

De Solidorum Elementis

À la page 96 de son ouvrage posthume *Descartes savant* (1921)¹, le philosophe Gaston Milhaud² écrit

« *C'est dans des entretiens fréquents, au cours des années 1619-1620, que Faulhaber et le jeune Descartes ont échangé des idées, le premier proposant à l'autre des problèmes de toutes sortes dont celui-ci apportait bientôt les solutions. Si un tel témoignage³ avait besoin d'être confirmé, il le serait par un petit traité de Descartes trop peu connu, le De Solidorum Elementis, où notre philosophe imite manifestement, dans leur fond et dans leur forme, des recherches toutes spéciales de Faulhaber sur les polyèdres.* »

Il ajoute que leurs rencontres et les fameuses rêveries du « poêle » aux environs d'Ulm, où habitait Johann Faulhaber, tournent autour de 1620⁴ et que le *De Solidorum Elementis* a été rédigé fin 1619 ou début 1620.

1. Reprise d'un article paru en 1918 dans le vol. 25 de la *Revue de Métaphysique et de Morale*.

2. Vivant de 1858 à 1918, normalien de la promotion 1878 (Baudrillart, Bergson, Jaurès...), reçu troisième à l'agrégation de mathématiques, il enseigna de 1881 à 1890 en Mathématiques Spéciales au Havre, puis à Montpellier où il soutiendra sa thèse de philosophie en 1894 et sera aussitôt nommé maître de conférences avant d'entrer en Sorbonne en 1909. Voir aussi ses pages 84-7.

3. De Lipstorp qui nous rapporte ces faits.

4. Plus précisément le 10/11 novembre 1619 pour ce qui concerne le poêle, et le 10 novembre 1620 pour l'« invention admirable » (*inventi mirabilis*, pour laquelle Milhaud a choisi plutôt la date du 11), dont nous ignorons beaucoup de choses, y compris sa signification précise, et même en particulier le lieu où elle fut conçue.

Pierre Costabel, dans son étude séminale *Exercices pour les éléments des solides*, qu'il faut toujours avoir sur un coin de la table pour pouvoir examiner ce traité, donne comme dates certaines : entre 1620 et 1628 (page XIII)⁵. L'autre éditeur contemporain, Pasquale Joseph Federico⁶, suggère au contraire 1630 (pages 4 et 32).

Notre opinion - personnelle et discutable -, pencherait vers une œuvre de grande jeunesse et enfermerait donc la composition du *De Solidorum elementis* entre 1620 et 1623, rejoignant ici Stephen Gaukroger dans sa page 127 de son *Descartes : an intellectual biography* et la page 148 de *Descartes's mathematical thought* de Chikara Sasaki⁷.

- En 1619 (ou avant) serait incompatible avec la date de publication des *Harmonices Mundi* de Kepler⁸, qui contiennent notamment une étude approfondie des polyèdres archimédiens qui occupent une grande place dans le *De solidorum elementis* comme dans le Livre II de Kepler.
- Dépasser 1623 ou une année voisine nous paraît également difficile à envisager à cause de la comparaison, par exemple, avec les *Regulæ*, dont les préoccupations et le style si différents montrent, pensons-nous, que la pensée mathématique de Descartes a fortement évolué entre les deux, ce qui demande du temps.

5. À la page 48, il adoucira 1628 en 1627.

6. Mathématicien et spécialiste en propriété intellectuelle, né le 25 mars 1902 et décédé le 2 janvier 1982, quelques mois avant la publication de son livre *Descartes on polyhedra : a study of the De Solidorum Elementis*.

7. Et non aux pages 196-201 comme l'indique faussement Gaukroger. On peut noter ici que ni Joseph Frederick Scott ni William R. Shea ne font allusion au *De solidorum elementis*.

8. Sur les liens entre les pensées keplerienne et cartésienne, on pourra par exemple se reporter au très intéressant article d'Édouard Mehl sur *Euclide et la fin de la Renaissance*, qui contient quelques pages remarquables sur notre traité.

Pour le nombre 1623, voir les pages 106-7 de Costabel.

Cela dit, dans la page 367 de sa recension de 1990 du livre de Costabel, Jean-Robert Armogathe indique que la troisième partie est *incomplète et postule que Descartes ignorait alors la Collection mathématique de Pappus et les Harmonices Mundi de Képler*, reprenant ainsi une affirmation - non pleinement argumentée -, aux pages 104-5 de ce livre. En revanche, Ivo Schneider, à la page 47 de son article *Trends in German mathematics at the time of Descartes' stay in southern Germany* dans le livre *Mathématiciens français du xviiie siècle : Descartes, Fermat, Pascal*, écrit « *Reading books in Latin like Kepler's Harmonices Mundi, which had just appeared, would have caused no problem for Descartes* ». Nous y reviendrons.

Théorèmes dits de Proclus et d'Euler

Avant de pouvoir commenter les cinq premières lignes du texte, il faut examiner deux théorèmes importants de géométrie, plane et spatiale, connus sous les patronages de Proclus - très certainement de manière injuste - et d'Euler, ce dernier étant parfois attribué au couple Descartes-Euler. Ils concernent des propriétés de courbure d'un polygone (resp. d'un polyèdre) en ses sommets.

Le théorème attribué à Proclus

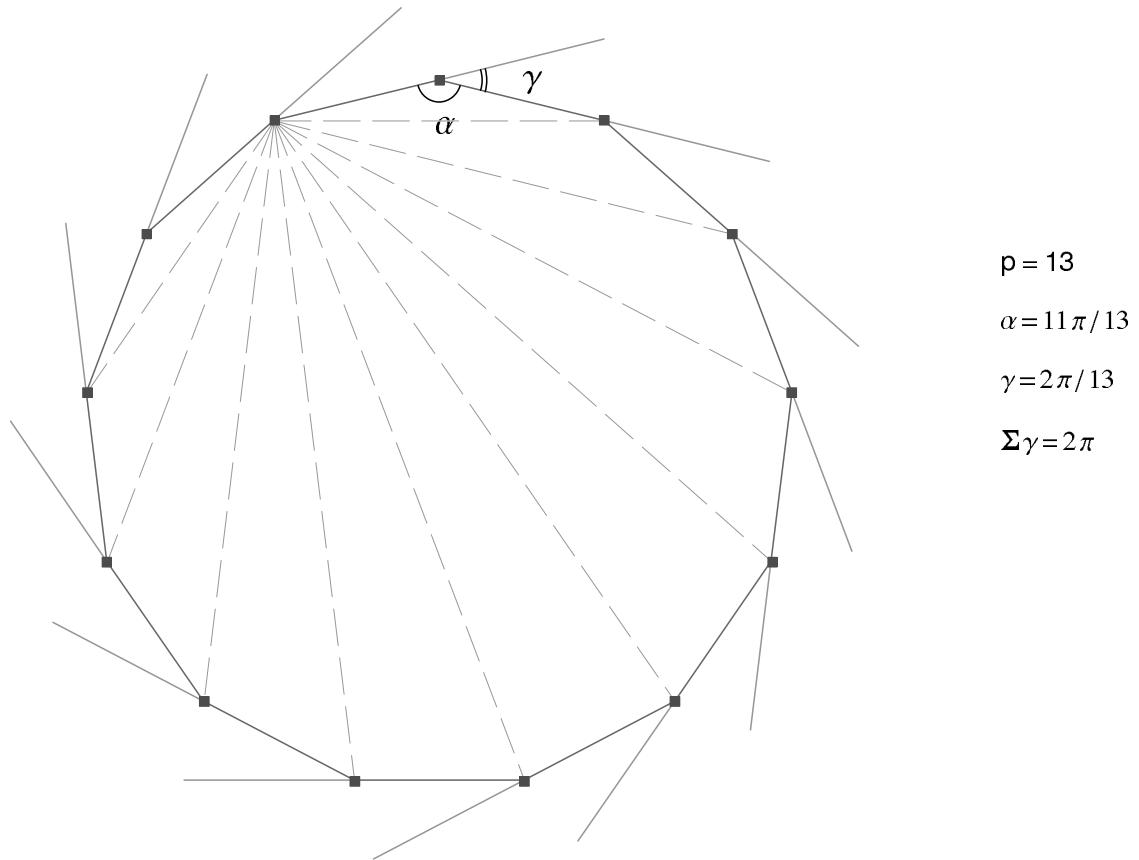


FIGURE 1.1 – Courbures locale et totale d'un polygone plan

En voici deux énoncés clairement équivalents

- La somme $\Sigma \alpha$ des mesures des angles intérieurs d'un p -polygone, supposé convexe pour simplifier⁹ est égale à $(p - 2)\pi$ radians, soit encore $2p - 4$ angles droits ; dans ce qui suit, comme Descartes, nous prendrons systématiquement l'angle droit comme unité d'angle.
- La somme $\Sigma \gamma$ des suppléments $\gamma = 2 - \alpha$ (c'est-à-dire $\pi - \alpha$ dans les notations ordinaires), appelée ici *courbure totale* du polygone (alors que chaque γ est une *courbure locale*), est constante et vaut $2p - \Sigma \alpha = 4$.

La figure ci-dessus contient, visuellement pourrait-on dire, les preuves les plus simples de ces deux affirmations. Elle a été réalisée dans le cas particulier d'un polygone régulier à treize côtés¹⁰. Du fait de la régularité du polygone, les angles α et γ sont constants, ce qui simplifie la compréhension.

- « La somme $\Sigma \gamma$ vaut 4 » (c'est-à-dire 2π) signifie simplement qu'une certaine demi-droite tourne et revient à sa position initiale après s'être appuyée sur chaque sommet successif, ce qui donne une variation d'angle correspondant à un tour complet, soit 360 degrés ou quatre angles droits : cette remarque prouve de notre première affirmation.
- « La somme $\Sigma \alpha = 2(p - 2)$ » résulte aussitôt du découpage de la plaque polygonale en $p - 2$ (ici 11) triangles dont la somme des angles vaut 2 d'après la Proposition 32 du Premier Élément d'Euclide¹¹ : notre seconde affirmation en découle.

Il existe de nombreuses autres démonstrations de ces faits. En voici trois. La première est rapportée par Proclus Diadochus. La seconde est due à Euler dans sa tentative de 1751, presque réussie, de démonstration de sa formule généralisant le théorème de Proclus. La dernière, lointainement inspirée de

9. Bien que cela ne soit pas nécessaire, sa démonstration s'étendant facilement au cas de polygones ayant un point intérieur.

10. Pour la dernière fois, les valeurs des angles y sont encore données de façon traditionnelle en radians.

11. Voir par exemple la page 255 de l'édition Vitrac, ou la page 316 de l'édition Heath dans leurs premiers volumes, ainsi que les commentaires afférents.

la maladroite figure 4b) de la page 38 de Federico, est très intéressante car elle peut avoir inspiré Descartes lors de son passage du plan à l'espace.

Le byzantin Proclus de Lycie le Diadoque¹²(411-485), Doyen de l'Académie, nous intéresse ici à cause de ses *Commentaires sur le Premier Livre des Éléments d'Euclide*. La figure ci-dessous, tirée de l'édition grecque de référence de Friedlein (page 379)¹³, indique comment, grâce à l'égalité de deux angles alternes-internes, prouver le théorème de base sur la somme des mesures des angles d'un triangle, là où Euler utilise aussi la parallèle à un côté à l'intérieur d'un angle extérieur¹⁴.

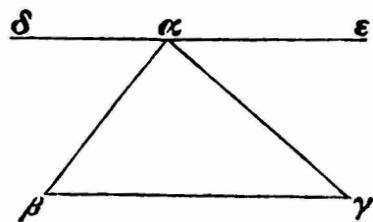


FIGURE 1.2 – Une figure d'une édition de Proclus (1873)

Une fois acquis le théorème pour un triangle, Proclus indique comment le généraliser à tout polygone¹⁵

« Nous devons d'abord savoir que toute figure rectilinéaire [polygonale] peut être divisée en triangles, car le triangle est la source de toutes les constructions comme nous l'apprend Platon disant : "Toute surface de formation rectiligne plane est composée de triangles." Toute figure rectilinéaire peut être triangulée en nombre inférieur de deux unités de celui de ses côtés [...] »

« Par suite le double du nombre de triangles constitutifs donne le nombre d'angles droits mesurant la somme des angles d'une figure polygonale [...] »

12. Successeur de Syrianus à l'Académie.

13. Et non 397, comme indiqué par erreur dans le premier volume de l'*Histoire des mathématiques grecques* de Heath à la page 143.

14. Proclus indique que cette preuve est due aux Pythagoriciens comme le rapporte Eudème de Rhodes, dit le Péripatéticien (voir par exemple la page 299 de la traduction de Glenn Raymond Morrow).

15. Il faut toutefois par exemple que ce dernier ne soit pas croisé, mais ce genre de restriction logique n'était pas de mise à cette époque.

« Indiquons brièvement un corollaire : lorsque l'on considère chacun des côtés pris l'un après l'autre, les angles extérieurs ainsi construits ont quatre angles droits comme somme¹⁶. »

On reconnaît nos deux théorèmes. Pour le premier énoncé, il peut être utile de comparer notre figure initiale à la suivante, due à Euler, qui rend le texte de Proclus également évident, mais d'une autre manière, visiblement inspirée par une récurrence descendante basée sur les suppressions successives de sommets (D, E, C, F) jusqu'à obtenir un seul triangle (ABG)

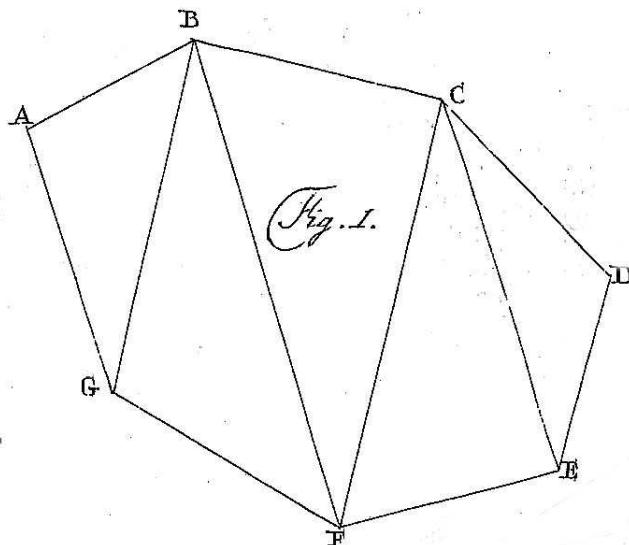


FIGURE 1.3 – Une preuve visuelle du théorème de Proclus par Euler

La dernière partie du texte de Proclus - notre second énoncé - admet au moins deux démonstrations pouvant sauter aux yeux : la première est claire sur notre première figure ; une autre, toute aussi forte, est lisible ci-dessous, si l'on comprend qu'un angle « extérieur » est un supplémentaire, et peut donc y être obtenu en élevant deux perpendiculaires en chaque sommet du côté considéré

16. Traduction libre de l'auteur, d'après les pages 382 de l'édition Friedlein et 300 de l'édition Morrow ; le texte de Platon (*Timée* 53c) est repris de la collection Budé.

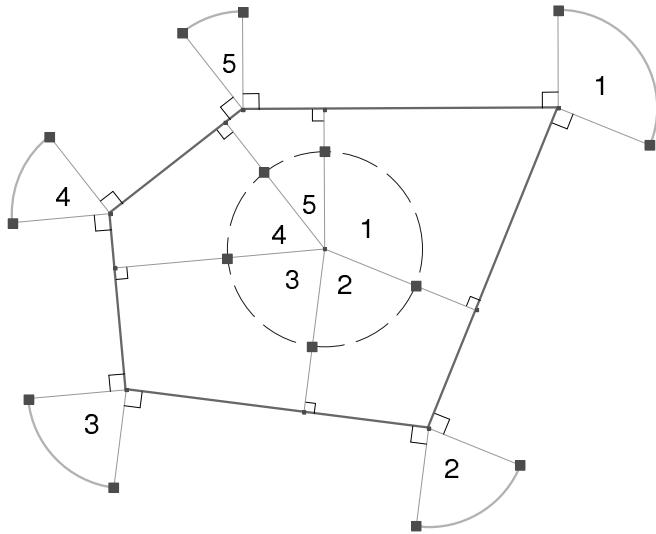


FIGURE 1.4 – Une démonstration visuelle du théorème de Proclus

Notons également que la grande ancienneté du second théorème de Proclus (et, partant, du premier) est notamment attestée par deux textes d'Aristote dans les *Analytic Posterior* ou *Seconds analytiques*, que nous citons ici librement d'après les traductions de Jules Tricot et Pierre Pellerin¹⁷

« Nous savons que les angles externes sont égaux à quatre droits parce que le triangle auquel ils appartiennent [...] est une figure rectiligne. »

« Avoir ses angles externes égaux à quatre droits est un attribut qui s'étend au delà du triangle ou du carré, [...] à toutes les figures dont les angles externes sont égaux à quatre droits. »

Résumons enfin le premier théorème de Proclus sous la forme suivante : pour tout p -polygone du plan, le nombre

$$\frac{\Sigma \alpha}{p - 2}$$

est constant car égal à 4 angles droits. Ce fait, simple à découvrir et à démontrer, peut-il être généralisé à l'espace ? Le numérateur deviendrait alors

17. À savoir I 24 85b38 et II 17 99a19, pages respectives 131, 236, et 197, 329.

simplement $\Sigma\Sigma\alpha$, en s'élargissant à toutes les mesures des angles de tous les polygones formant les faces du polyèdre considéré; mais l'analogie du nombre p à introduire n'est pas évident, car celui-ci est à la fois le nombre des sommets et celui des côtés du polygone, cette dernière notion se déclinant sous deux formes (arêtes et faces) dans l'espace. Cela supposé résolu, quelle est alors la valeur de la constante ainsi mise en évidence? La section suivante, due à Descartes au moins pour l'essentiel, répond à cette question naturelle.

La formule d'Euler vue par Descartes

Cette célèbre égalité a été d'abord rencontrée, ou du moins frôlée de très près, par Descartes dans le *De solidorum elementis*. Elle reposa pour lui, croyons-nous, sur une intuition d'une extension à l'espace de la formule ci-dessus $\frac{\Sigma\alpha}{p-2} = 4$. Si l'on note (S, A, F) les nombres respectifs de sommets, arêtes et faces d'un polyèdre convexe¹⁸, généralisation naturelle du polygone convexe, il y a trois prétendants logiques à cette succession

$$\frac{\Sigma\Sigma\alpha}{A-2} = \lambda \quad \text{ou} \quad \frac{\Sigma\Sigma\alpha}{F-2} = \mu \quad \text{ou} \quad \frac{\Sigma\Sigma\alpha}{S-2} = \nu.$$

Pour lever cette ambiguïté et tenter de vérifier si λ , μ ou ν étaient des constantes, Descartes avait en particulier à sa disposition les célèbres *polyèdres de Platon*, constituant notamment le thème central du Treizième et dernier Élément d'Euclide¹⁹.

Nous reviendrons au début de la section suivante sur ce concept fondamental de la géométrie grecque ancienne, redevenu à la mode comme source d'inspiration pour toute la Renaissance (que l'on pense par exemple à des mathématiciens comme le Frère franciscain Luca Pacioli²⁰ - dont le livre *La*

18. On peut le poser sur n'importe laquelle de ses faces placée sur une table.

19. À la suite de Proclus (pages respectives 70 et 58 chez Friedlein et Morrow), de nombreux commentateurs pensent d'ailleurs que le but ultime de toute cette œuvre était de fonder cette étude - existence et unicité - des cinq corps réguliers; voir la dix-huitième et dernière Proposition du Treizième et dernier Élément d'Euclide (Vitrac IV 463, Heath III 503).

20. Voir son célèbre portrait de 1495 (Pinacothèque Capodimonte de Naples), où figurent un Dodécaèdre et un Rhombicuboctaèdre, cas particulier d'un polyèdre semi-régulier ou archimédien.

Divine Proportion parut en 1509 à Venise avec des illustrations de Léonard de Vinci lui-même parmi lesquelles un fameux Dodécaèdre creux a été si souvent reproduit -, des peintres comme Albrecht Dürer²¹ ou des astronomes comme Jean Kepler, sur lequel nous revenons plus loin). La fascination que le Dodécaèdre et ses cousins développe chez artistes et chercheurs dure d'ailleurs encore jusqu'à nos jours (Salvador Dalí...), où la « Géométrie Sacrée » (sic), par exemple, ne manque pas d'adeptes, assez peu mathématiciens mais souvent proches d'un certain spiritisme.

Voici des vues cavalières familières de ces fameux cinq polyèdres, dont la reproduction - à main levée ou aux instruments - constitue un exercice classique de toutes les écoles de beaux-arts

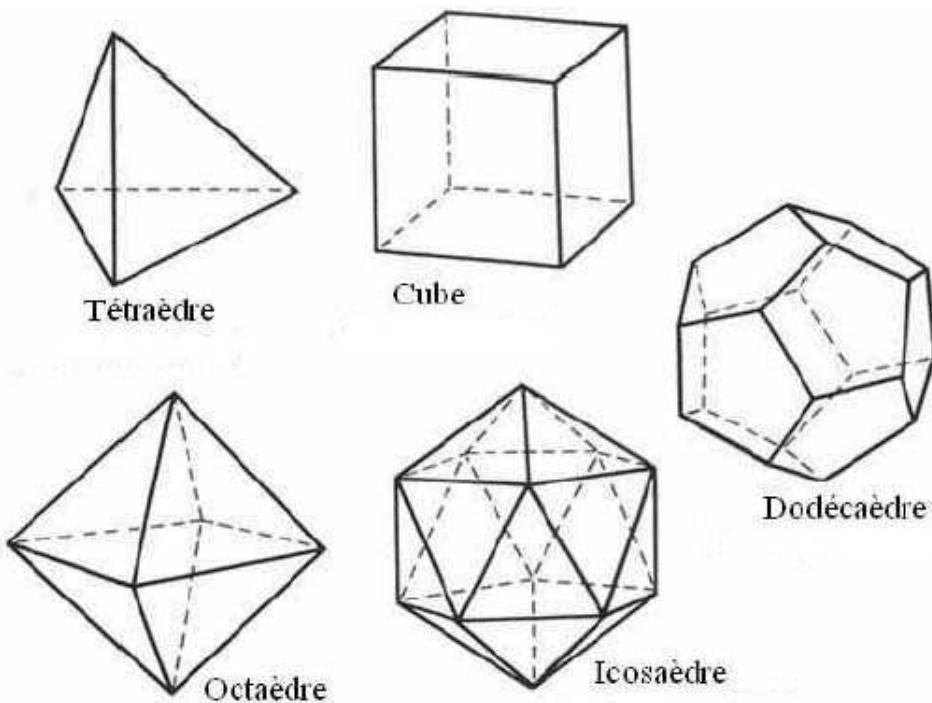


FIGURE 1.5 – Les cinq polyèdres platoniciens

21. Notamment dans le Livre V de *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheit : in Linien Ebnen vo gantzen Corporen* (1525) ; mais le solide figurant sur sa célèbre gravure *Melancholia* de 1514 est irrégulier.

Le tableau ci-dessous donne, pour chacun de ces cinq solides, son nom, les entiers S (ommets), A (rêtes), F (aces), le nombre d'arêtes p de chaque polygone-face, l'angle au sommet α de chacun des polygones-faces qui vaut $2 - 4/p$ angles droits d'après le théorème de Proclus, la somme $\Sigma \alpha$ qui vaut $F \Sigma \alpha = 2(p - 2)F$, et enfin les nombres λ , μ et ν correspondants

NOM	S	A	F	p	α	Σ	λ	μ	ν
TÉTRAÈDRE	4	6	4	3	2/3	8	2	4	4
CUBE	8	12	6	4	1	24	12/5	6	4
OCTAÈDRE	6	12	8	3	2/3	16	8/5	8/3	4
DODÉCAÈDRE	20	30	12	5	6/5	72	18/7	36/5	4
ICOSAÈDRE	12	30	20	3	2/3	40	10/7	20/9	4

La messe est dite : la bonne généralisation, si elle existe, est donc (en abrégeant le numérateur en Σ)

$$\frac{\Sigma}{S - 2} = \frac{\Sigma \Sigma \alpha}{S - 2} = 4$$

soit encore

$$\Sigma = 4S - 8$$

ce qui est exactement ce que Descartes écrit dans le troisième paragraphe de son texte, sous la forme²² suivante inspirée par la page 13 de Costabel

« *Si l'on multiplie quatre angles plans droits par le nombre d'angles solides [de sommets] et si l'on retranche 8 angles plans droits du produit, il reste l'agrégat de tous les angles plans formant la surface du corps solide considéré.* »

Descartes aurait pu également étudier de ce point de vue le polyèdre semi-régulier *Rhombicuboctaèdre* (8 triangles équilatéraux, 18 carrés, tous de

22. Texte originel latin : « *Si quatuor anguli plani recti ducantur per numerum angularum solidorum & ex producto tollantur 8 anguli recti plani, remanet aggregatum ex omnibus angulis planis qui in superficie talis corporis solidi existunt* » (Costabel, page 1; Federico, page 46).

mêmes longueurs de côtés²³), figurant à demi empli d'eau en haut et à gauche du portrait de Luca Pacioli, pour lequel $S = 24$, $A = 48$, $F = 26$ et

$$\Sigma = \Sigma\Sigma\alpha = 8\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) + 18(1 + 1 + 1 + 1) = 88 = 96 - 8 = 4S - 8.$$

La première image ci-dessous provient de l'édition de la *Divine Proportion* de Luca Pacioli ; la seconde, extraite de son portrait conservé à Naples, a vu ses couleurs inversées pour obtenir une meilleure lisibilité.

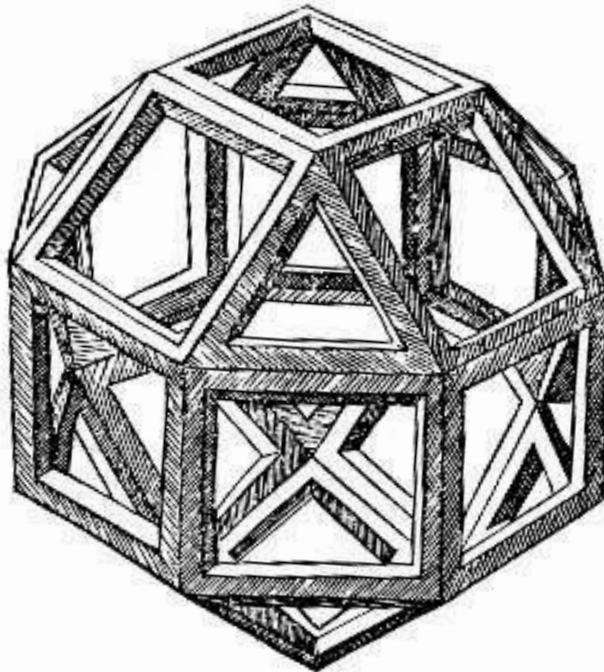


FIGURE 1.6 – Le Rhombicuboctaèdre vu par Léonard de Vinci . . .

23. Cf. la figure 28 de la page 106 de Federico.

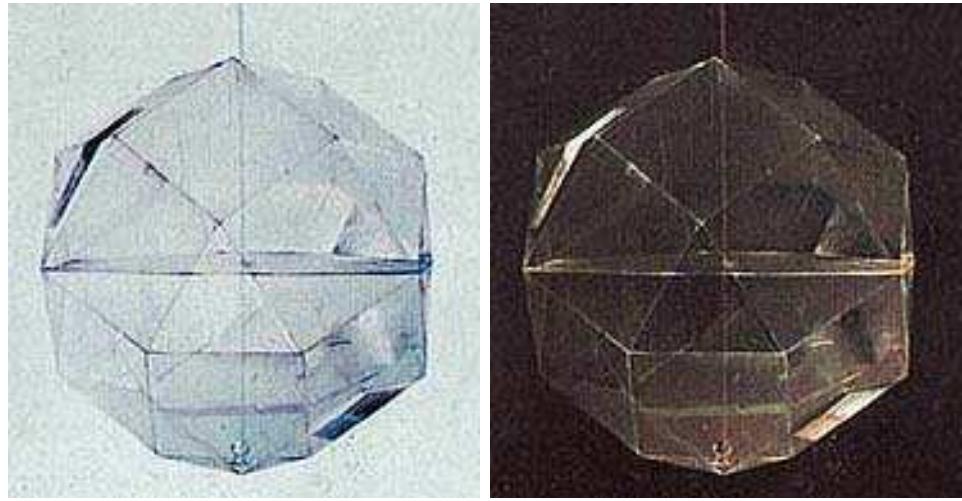
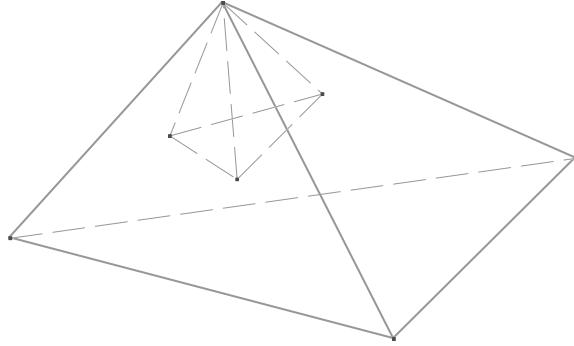


FIGURE 1.7 – ... et par l'auteur du portrait de Luca Pacioli

Bien entendu, la vérification supposée de l'hypothèse $\Sigma = 4S - 8$ aurait pu être tentée, toujours avec succès, sur des dizaines d'autres exemples de polyèdres, par exemple la réunion d'un tétraèdre et de son symétrique par rapport au plan de l'une de ses faces²⁴ car cette relation est générale, ou presque : voici en effet par exemple une figure très simple²⁵

FIGURE 1.8 – Un tétraèdre partiellement évidé ($S = 7$, $A = 12$, $F = 8$)

24. Mais ce ne serait plus exact pour la réunion de deux tétraèdres symétriques l'un de l'autre par rapport à un plan les coupant chacun en un sommet.

25. Dont l'on peut déduire de façon analogue une contre-exemple trivial pour la relation de Proclus $\Sigma \alpha = 2p - 4$ avec $p = 5$ ou 6 , selon qu'il s'agit du nombre de sommets ou de côtés, et $\Sigma \alpha = 4$.

pour laquelle

$$\Sigma = 8 \cdot 2 = 16 \neq 20 = 4S - 8.$$

Devant un tel exemple, la question qui se pose naturellement est : *la partie comprise entre les deux tétraèdres de cette figure est-elle un polyèdre ?*

Pour certains mathématiciens, la réponse est positive, puisque par exemple un excellent site internet (www.mathcurve.com) écrit²⁶

« Un polyèdre de l'espace à trois dimensions est un ensemble non vide de polygones situés dans des plans de l'espace tels que

- 1) *chaque côté de chaque polygone coïncide avec un côté d'un seul autre polygone de l'ensemble, non coplanaire avec le premier.*
- 2) *deux sommets de deux polygones sont toujours reliés par une suite de côtés de polygones ayant chacun une extrémité en commun avec le suivant (condition de connexité).*
- 3) *deux polygones n'ont aucun point intérieur en commun. »*

Ce ne serait plus le cas si l'on ajoutait une condition supplémentaire, comme la suivante

4) *deux points intérieurs à deux faces polygonales peuvent toujours être joints par une courbe continue incluse dans la réunion des faces, côtés compris, mais ne passant par aucun sommet.*

D'ailleurs le même site, de très bonne qualité rappelons-le, parle de la « *suite des ordres des faces aboutissant à un sommet* », ce qui n'a pas de sens pour la pointe du tétraèdre ci-dessus.

Cela prouve simplement que *définir le concept de polyèdre* est une question très épineuse, sur laquelle il n'y a pas de consensus complet. En tout cas la définition usuelle de l'Antiquité, qu'il s'agisse de la première du onzième Élément d'Euclide, « *Est solide ce qui a longueur et largeur et hauteur* » (éd. Vitrac, IV page 73) complétée à l'intérieur de la douzième Définition de cet Élément par la condition « *contenue par des <figures> planes* » (à propos de la pyramide, page 12), ou la bien banale « *un polyèdre est un volume limité* »

26. Dans la définition ci-dessous, « polygone » est une abréviation pour l'expression « plaque polygonale plane ».

par des faces planes », suffisante par exemple aux yeux de Legendre²⁷, sont assez parlantes, mais notoirement beaucoup trop laxistes. Entre ces textes lapidaires et des propos beaucoup plus (trop ?) techniques, on pourrait par exemple se satisfaire de ce qui suit²⁸.

Il faut commencer par définir, aussi précisément que possible, les notions de *plaqué polygonale* (simple) et de *polygone*, utilisées ensuite pour les polyèdres, en rejetant par exemple la figure suivante ou d'autres analogues²⁹

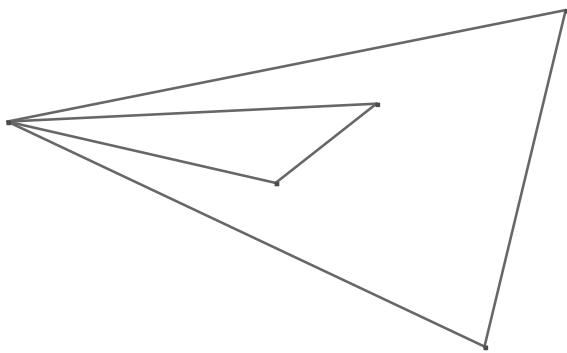


FIGURE 1.9 – *Une figure non polygonale, à six côtés et cinq sommets*

Commençons par les polygones (supposés ici *non croisés*, encore dits *simples* ou *de Jordan*)

Une plaque polygonale est une partie bornée d'un plan, **connexe** comme sa **frontière** appelée **polygone**, réunion de segments (ses **côtés**), dont les sommets sont appelés ses **sommets**, et notamment telle que

- tout sommet est extrémité d'exactement deux côtés, non alignés,
- deux côtés distincts et non disjoints se coupent selon un sommet.

27. Dans sa lettre à Goldbach du 14 novembre 1750, Euler parlait de *corps délimité par des plans*.

28. Ce qui exclut le tétraèdre évidé, ou le cube privé d'un cube intérieur deux fois plus petit, et de nombreux autres cas pathologiques (*cf.* par exemple Johann Hessel, 1815).

29. On pourra alors montrer facilement que les nombres de sommets et de côtés sont égaux à un même entier p : il suffit de dénombrer de deux manières différentes le nombre de couples (sommets, côté) tels que $\text{sommets} \in \text{côté}$. On peut alors également montrer - mais c'est plus difficile - que toute plaque polygonale simple est *triangulable* en $p - 2$ parties, et vérifie donc le théorème de Proclus.

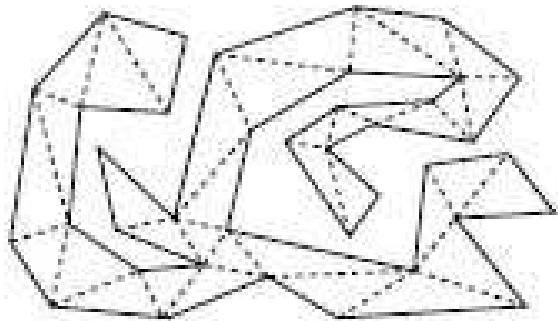


FIGURE 1.10 – Une 38-plaque polygonale triangulée (Nancy Amato et al.)

Nous sommes maintenant prêts à tenter une définition assez parlante, et pourtant assez précise, de ce qu'est un polyèdre (supposé ici *non étoilé*)

Un polyèdre est une partie bornée d'un espace de dimension trois, connexe comme sa frontière réunion de plaques polygonales planes (ses faces, en nombre F), dont les sommets sont appelés ses sommets (en nombre S), et les côtés sont appelés ses arêtes (en nombre A), et notamment tel que

- toute arête est côté d'exactement deux faces, non coplanaires,
- deux faces distinctes et non disjointes se coupent selon un sommet ou une arête,
- au voisinage de tout sommet, les demi-droites incluant les arêtes qui le contiennent sont également celles d'un cône à base connexe.

Cette troisième condition exclut par exemple le tétraèdre partiellement évidé : en effet il existe un plan proche du sommet singulier de la figure, qui la coupe suivant deux triangles disjoints.

La seconde condamne certains polyèdres « étoilés », comme celui qui est reproduit ci-dessous, pour lequel deux des faces ont des parties n'appartenant pas à la frontière car intérieures au solide, et se coupent suivant un segment qui n'est pas une arête, alors que deux autres couples de faces ont chacun une plaque triangulaire en commun.

Mais nous ne pouvons garantir d'être ainsi mis à l'abri d'éventuels autres exemples litigieux. Cela dit, nous nous en contenterons au sein de ce travail.

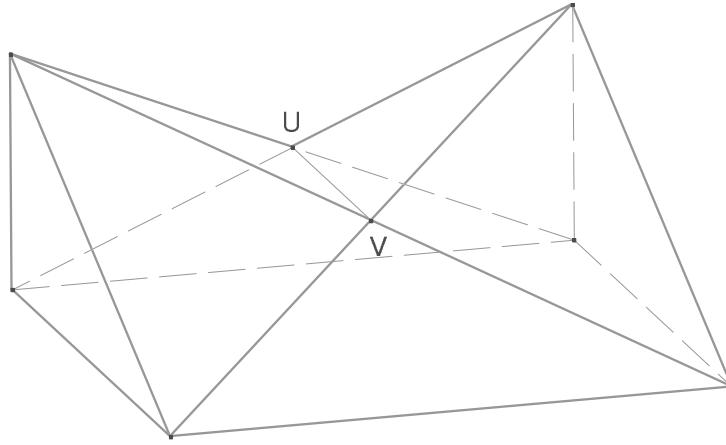


FIGURE 1.11 – Un polyèdre étoilé ($S = 6$, $A = 12$, $F = 9$)

De la deuxième condition particulière, nous pouvons par exemple déduire très facilement, à l'image de ce qui a été fait plus haut pour les polygones, une relation essentielle entre les nombres de côtés des faces et celui des arêtes, égal à *la moitié du précédent*, ce qui se voit aussitôt en examinant le nombre de couples (arête, face) tels que arête \subset face.

C'est d'ailleurs ce que Descartes affirme, à juste titre, au début de son onzième paragraphe³⁰

« Sur la surface d'un corps solide il y a toujours deux fois plus d'angles plans que de côtés, car un côté est toujours commun à deux faces³¹. »

La formule d'Euler de 1750

La formule d'Euler, que certains appellent formule de Descartes-Euler, a vu le jour en 1750 ; elle figure dans l'article *Elementa doctrinæ solidorum*, noté

30. Un tel découpage ne figure pas dans le manuscrit de Leibniz. Il a été introduit, d'abord modestement en 1860 par le premier éditeur, le comte Louis-Alexandre Foucher de Careil, puis affiné par le vice-amiral Ernest de Jonquières en 1890 (suivi d'Adam et Tannery en 1908), et surtout repris et légèrement modifié par Pierre Costabel en 1987 pour faciliter la compréhension du texte.

31. « *Sunt semper duo plures anguli plani in superficie corporis solidi, quam latera; unum enim latus semper commune est duobus faciebus.* », Costabel page 3.

E230 dans la classification d'Eneström, lu devant l'Académie des Sciences de Berlin le 26 novembre, et publié à Saint-Pétersbourg en 1758. Elle s'énonce ainsi : pour de très nombreux « bons » polyèdres³², on dispose de l'égalité

$$e = S - A + F = 2.$$

Elle ne sera démontrée (en partie), par le même auteur, que l'année suivante (*Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*, E231, lecture du 9 septembre à Berlin, puis reprise le 6 avril 1752 à Saint-Pétersbourg et éditée à la suite du précédent). Adrien-Marie Legendre affinera cette preuve dans ses *Éléments de Géométrie* en 1794, mais il faudra attendre les *Recherches sur les polyèdres* d'Augustin-Louis Cauchy³³ pour disposer d'une démonstration solide. La bonne généralisation sera enfin due à Henri Poincaré, dans son mémoire de 1893 *Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres*³⁴.



FIGURE 1.12 – La formule d'Euler ou Descartes-Euler

Sur le timbre est-allemand de 1983 reproduit ci-dessus, la lettre f représente le nombre de faces (*Facetten* ou *Flächen*), le e (*Endknoten*) celui des sommets et k (*Kanten*) celui des arêtes. Le dessin d'un icosaèdre régulier permet de vérifier cette égalité dans le cas de cet élégant polyèdre platonicien.

32. Et en tous cas pour tous les polyèdres convexes.

33. Journal de l'École polytechnique, XVI, Tome IX, page 68 puis 183 pour une suite.

34. *Compte rendus de l'Académie des Sciences*, 140, pp. 110-7. On trouvera des compléments intéressants chez Henri Lebesgue, *Remarques sur les deux premières démonstrations du théorème d'Euler relatif aux polyèdres* (1924, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 52, pp. 315-36), et surtout les *Regular Polytopes* de Harold Scott MacDonald Coxeter (1948, pp. 9 et 23-4) ainsi que le livre d'Imre Lakatos *Proofs and Refutations* (1976).

Voici le début de la « preuve » proposée par Legendre, telle qu'elle fut lue par des dizaines de milliers d'étudiants

PROPOSITION XXV.

T H É O R È M E.

Soit S le nombre des angles solides d'un polyèdre, H le nombre de ses faces, A le nombre de ses arêtes; je dis qu'on aura toujours $S + H = A + 2$.

Prenez au-dedans du polyèdre un point d'où vous menez des lignes droites aux sommets de tous ses angles ; imaginez ensuite que du même point comme centre on décrive une surface sphérique qui soit rencontrée par toutes ces lignes en autant de points ; joignez ces points par des arcs de grands cercles, de manière à former sur la surface de la sphère des polygones correspondants et en même nombre avec les faces du polyèdre.

FIGURE 1.13 – La proposition XXV (Livre VII, page 226) en 1794

En corollaire, on trouve la formule de Descartes $\Sigma = 4S - 8$ (qui ne sera explicitement reconnue comme cartésienne qu'en 1860). Voici une toute autre illustration de la formule d'Euler

Les relations de Descartes et d'Euler sont équivalentes

Cela résulte d'un calcul littéral fort simple

$$\begin{aligned} 4S - \Sigma &= 4S - \sum_{\text{som ang}} \sum \alpha = 4S - \sum_p \sum_{p-\text{face}} \alpha = 4S - \sum_p f_p (2p - 4) \\ &= 4S - 2 \sum_p p f_p + 4F = 4(S - A + F) \end{aligned}$$

d'où l'équivalence entre $\Sigma = 4S - 8$ (Descartes) et $S - A + F = 2$ (Euler). Cette équivalence aurait été à la portée de Descartes qui connaissait, comme nous l'avons vu (page 16), l'égalité $\sum p f_p = 2A$. Cela dit, il n'avait même pas introduit dans son traité les noms « sommet » et « arête », mais il est

plausible de croire que cela n'avait pas d'importance fondamentale sur la route de la formule d'Euler.

C'est bien entendu cette équivalence qui justifie, pour certains, le double patronage « Descartes-Euler ». Mais une lecture scrupuleuse du *De solidorum elementis* ne permet malheureusement pas d'aller trop loin dans cette voie : cette énigme restera toujours ouverte.

Des éléments de preuve du théorème d'Euler

La relation $S - A + F = 2$ est difficile à prouver : renvoyons cependant aux livres déjà cités de Coxeter et Lakatos pour y lire respectivement une justification rigoureuse assez courte et un très long développement sur toutes les insuffisances que l'on peut rencontrer en tentant de bâtir soi-même un raisonnement suffisamment correct.

Nous allons indiquer ici comment monter une démonstration de l'égalité $\Sigma = 4S - 8$, équivalente à $S - A + F = 2$, extension de la preuve du théorème de Proclus donnée page 7 et donc, peut-être (?), envisagée au moins partiellement par Descartes. Dans celle-ci, la relation cherchée

$$\sum \alpha = 2p - 4$$

était lue sur un recouvrement convenable du cercle unité par une suite de secteurs angulaires consécutifs. Ici la sphère unité, d'aire 8π dans le système trigonométrique usuel) remplacera le cercle de longueur 4π (2π), et les secteurs angulaires deviendront des **angles solides** adaptés au polyèdre.

Qu'est-ce qu'un angle solide ?

Une définition informelle peut être la suivante : c'est une *discrétisation* d'un cône convexe. L'exemple le plus simple est celui que constitue un trièdre, par exemple trirectangle, avec les trois arêtes deux à deux perpendiculaires et les trois faces deux à deux également perpendiculaires. Plus généralement, un angle solide est une pyramide dont la base serait située à distance infinie, et donc invisible.

Cette notion d'angle solide est aujourd'hui méconnue, mais remonte à Euclide³⁵. En voici une traduction française et une anglaise de la Définition 11 du XIème Élément

« Un angle solide est l'inclinaison, [contenue] par plus de deux lignes se touchant mutuellement tout en n'étant pas dans la même surface, relativement à toutes ces lignes.

Autrement : un angle solide est celui qui est contenu par plus de deux angles plans qui ne sont pas dans le même plan, construits en un seul point » (Vitrac, volume IV, page 82.)

« A solid angle is the inclination constituted by more than two lines which meet one another and are not in the same surface, towards all the lines.

Otherwise : A solid angle is that which is contained by more than two plane angles which are not in the same plane and are constructed to one point » (Heath, volume III, page 261.)

Le fait qu'Euclide se croit obligé de donner deux points de vue *duaux*, le premier pour lequel l'angle solide est constitué à partir d'un nombre fini de demi-droites concourantes et le second à partir d'un nombre fini de plaques angulaires consécutives, montre la complexité du concept³⁶. Pour un moderne, il faut ajouter que ces demi-droites ou ces plaques ne sont pas agencées n'importe comment, il faut en plus supposer une certaine convexité que nous expliciterons plus bas.

Une introduction la plus intuitive à cette notion, incontournable pour notre propos, consiste à partir d'une pyramide de sommet ω à base polygonale strictement convexe (\dots, u, v, w, t, \dots) dans un plan Π auquel ω est extérieur³⁷. Nous admettrons que la convexité du polygone de base de la pyramide implique que les *produits mixtes* tels que

$$d = (u|v|w) = ((u \wedge v)|w) = (v|w|u) = (w|u|v),$$

35. Elle était encore présentée au lycéens de la classe de Première jusqu'aux années 60.

36. Cette dualité étend à l'espace celle qui lie dans le plan sommets et côtés d'un polygone. Rappelons par exemple que le mot *triangle* est également ambigu : il représente à la fois un objet formé de trois points et un autre constitué de trois segments.

37. Dans la parenthèse ci-dessus, le premier et le dernier point, simplement suggérés par les symboles "...", sont identiques puisqu'un polygone est une ligne polygonale fermée.

c'est-à-dire les déterminants des triplets du type (u, v, w) dans une base orthonormée, ont tous même signe, par exemple positif en changeant au besoin l'orientation de l'espace³⁸.

Prenant ω comme origine de l'espace affine, les sommets $(\dots, u, v, w, t, \dots)$ du polygone permettent de définir des demi-droites d'origine ω perçant Π aux points $(\dots, u, v, w, t, \dots)$, que nous noterons par un abus d'écriture évident $(\dots, \mathbb{R}_+u, \mathbb{R}_+v, \mathbb{R}_+w, \mathbb{R}_+t, \dots)$, les lettres $(\dots, u, v, w, t, \dots)$ représentant maintenant des vecteurs et non plus des points. Ces demi-droites sont les « lignes » d'Euclide (encore dites « arêtes » de l'angle solide), les « angles plans » (ou « faces » de l'angle solide) étant par exemple les plaques triangulaires successivement définies par les couples tels que $(\mathbb{R}_+v, \mathbb{R}_+w)$.

Arêtes et faces sont en même nombre, fini. Si celui-ci croît indéfiniment, on obtient à la limite un cône convexe, ce qui justifie notre première ligne ci-dessus.

Les angles solides définis par un polyèdre de sommets (ω_i) sont clairement obtenus, en chacun de ces sommets, par les prolongement des arêtes du polyèdre admettant ω_i comme extrémité. *Chaque sommet a ainsi « son » angle solide.* C'est pourquoi Descartes n'emploi pas notre notation S pour représenter le nombre de sommets d'un polyèdre, mais la lettre α : « si l'on note α le nombre d'angles solides... », pas plus qu'il n'écrit « sommet », mais plutôt par exemple « ... ».

Le supplémentaire d'un angle solide

Cela fait, nous définirons maintenant l'angle solide *supplémentaire* du précédent à partir du sommet ω par les arêtes $(\dots, \mathbb{R}_+a, \mathbb{R}_+b, \mathbb{R}_+c, \dots)$ définies à partir des vecteurs (\dots, a, b, c, \dots) vérifiant les égalités successives $a = u \wedge v$, $b = v \wedge w$, $c = w \wedge t$ et ainsi de suite³⁹.

D'après les propriétés du produit vectoriel \wedge , les supports des arêtes $(\dots, \mathbb{R}_+a, \mathbb{R}_+b, \mathbb{R}_+c, \dots)$ sont perpendiculaires aux faces définies par les

38. Dans tout ce travail, $(x|y)$ et $x \wedge y$ représentent respectivement les produits scalaire et vectoriel des vecteurs x et y .

39. Si les sommets $(\dots, u, v, w, t, \dots)$ sont parcourus dans le sens positif, ce que nous pouvons supposer, les vecteurs (\dots, a, b, c, \dots) sont tous extérieurs à l'angle solide initial.

couples $(\dots, (u, v), (v, w), (w, t), \dots)$. Ce sont donc bien les analogues des perpendiculaires menées en chaque sommet d'un polygone respectivement aux côtés qui l'admettent comme extrémité : on comprend maintenant l'expression « *angle solide externe* » d'un polyèdre (« *corps solide* ») employée par Descartes.

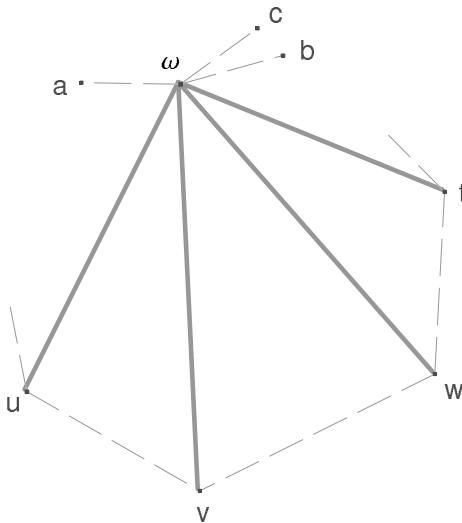


FIGURE 1.14 – Une partie d'un angle solide et de son supplémentaire

Nous admettrons que l'angle solide supplémentaire est encore convexe, comme son géniteur, qui est d'ailleurs son supplémentaire : nous sommes ici devant une transformation involutive. Chacun des deux angles solides est complètement extérieur à l'autre, si l'on excepte leur intersection : le singleton ω .

Grâce à la formule du *double produit vectoriel*⁴⁰, on dispose des égalités

$$a \wedge b = (u \wedge v) \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v|w) v - (u \wedge v|v) w = (u|v|w) v = dv$$

ainsi que de $b \wedge c = (v|w|t) w = \delta w$ avec d et δ strictement positifs, ce qui permet de justifier l'affirmation de la réciprocité évoquée ci-dessus.

Cette notion de supplémentarité remonte au moins à 1627 (*Doctrinæ triangulorum canonicae libri quatuor* de Willebrord Snell), et l'on en trouve des traces dès le treizième siècle.

40. C'est-à-dire $x \wedge (y \wedge z) = (x|z) y - (x|y) z$.

Dièdres d'un angle solide supplémentaire

Rappelons ce qu'est le *dièdre* ou plus précisément l'angle *dièdre*⁴¹ de deux demi-plans (P, Q) de même arête Δ : c'est celui que forment deux demi-droites (X, Y) d'origine commune appartenant à Δ et respectivement incluses dans P et dans Q ; changer d'origine laisse évidemment invariante la mesure D de leur angle.

Avec les notations précédentes, on peut prendre pour arête la droite $\mathbb{R}b$ et pour demi-plans ceux qui sont respectivement définis par les vecteurs a et c : cela définit l'un des dièdres D des demi-plans $(\mathbb{R}b, \mathbb{R}_+a)$ et $(\mathbb{R}b, \mathbb{R}_+c)$. Nous allons démontrer la relation fondamentale liant la mesure de l'angle (v, w) de l'une des faces de l'angle solide de départ et l'un des dièdres D de son supplémentaire

$$D \equiv \pi - (v, w) \mod 2\pi$$

soit encore $D \equiv 2 - (v, w) \mod 4$ en prenant, comme il est usuel dans ce chapitre, l'angle droit comme unité⁴².

Posons $k = \frac{(a|b)}{\|b\|^2}$ et $x = a - kb$: ce dernier vecteur est orthogonal à l'arête $\mathbb{R}b$ et situé du même côté de a par rapport à elle. Soient de même $h = \frac{(c|b)}{\|b\|^2}$ et $y = c - hb$. Alors $\cos D = \frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|}$. Or nous disposons des égalités

$$(x|y) = (a - kb|c - hb) = (a - kb|c) = (a|c) - \frac{(a|b)(b|c)}{\|b\|^2},$$

$$\|x\|^2 = \|a - kb\|^2 = \|a\|^2 - \frac{(a|b)^2}{\|b\|^2} = \frac{\|a \wedge b\|^2}{\|b\|^2} = d^2 \frac{\|v\|^2}{\|b\|^2},$$

$$\|y\|^2 = \|c - hb\|^2 = \delta^2 \frac{\|w\|^2}{\|b\|^2},$$

$$d\delta(v|w) = (a \wedge b | b \wedge c) = (a|b|b \wedge c) = (b|b \wedge c|a) = (b \wedge (b \wedge c)|a) = (b|c)(b|a) - \|b\|^2(c|a)$$

41. Abréviation classique pour la mesure D de cet angle.

42. Cette relation justifie naturellement la qualification d'angle solide *supplémentaire*.

ainsi donc que de

$$d\delta \cos D = d\delta \frac{(x|y)}{\|x\| \|y\|} = \|a \wedge b\| \|b \wedge c\| [(a|c) \|b\|^2 - (a|b) (c|b)] = -d\delta \cos(v, w).$$

Il en résulte que D et (v, w) sont deux angles supplémentaires, ce qu'il fallait démontrer.

Application à la formule de Descartes

De la relation qui vient d'être démontrée résulte l'égalité $\Sigma = 4S - 8$. Soient en effet, pour tout sommet ω d'un polyèdre convexe donné

- A_ω l'angle solide associé et A'_ω son supplémentaire,
- g_ω le nombre de faces de A_ω admettant ω comme sommet commun,
- d_ω la somme des mesures⁴³ des dièdres de A'_ω ,
- Σ_ω la somme des mesures des angles α des faces de A_ω .

On dispose alors des égalités $d_\omega + \Sigma_\omega = 2g_\omega$ et

$$\mathcal{A} = \sum_{\omega} (d_\omega - 2g_\omega + 4) = \sum_{\omega} (4 - \Sigma_\omega) = 4S - \Sigma$$

où S est, comme toujours, le nombre de sommets du polyèdre⁴⁴. La fin du raisonnement repose maintenant sur deux propositions assez intuitives que nous admettrons ici.

a) Rappelons tout d'abord le théorème d'Albert Girard, connu dès 1626, selon lequel l'aire d'un triangle sphérique UVW , par exemple obtenu par l'intersection d'un angle solide à trois faces (un *trièdre*) avec une sphère centrée en son sommet, est $\sigma = \hat{U} + \hat{V} + \hat{W} - \pi$, ou plutôt $\hat{U} + \hat{V} + \hat{W} - 2$ avec l'angle droit comme unité. On peut en démontrer une extension naturelle⁴⁵ : **l'aire du polygone sphérique \mathcal{P}_ω intersection de A_ω et de la sphère unité centrée en ω vaut $d_\omega - 2(g_\omega - 2)$.** Par suite, $\mathcal{A} = \sum_{\omega} (d_\omega - 2g_\omega + 4)$ n'est autre que la somme des aires de ces \mathcal{P}_ω .

43. Avec, comme toujours, l'angle droit comme unité d'angle.

44. Souvent noté α par Descartes dans son traité.

45. Il suffit de suivre une démarche analogue à celle de la seconde démonstration du théorème de Proclus : décomposer le polygone sphérique en triangles sphériques ayant tous même sommet.

Vérifions cela au moins sur un exemple très simple : celui d'un cube. En chacun des huit sommets, A_ω et A'_ω sont simplement deux « huitièmes » d'espace, trièdres trirectangles opposés par le sommet. L'aire de chaque \mathcal{P}_ω est donc la huitième partie de celle de la sphère entière et vaut donc $(1/8) 4\pi$, soit encore 1 avec nos notations ; or $d_\omega - 2g_\omega + 4 = 1$ puisque $d_\omega = g_\omega$ dans ce cas (très) particulier⁴⁶. Notons qu'ici $4S - \Sigma = \mathcal{A} = \sum_\omega 1 = 8$.

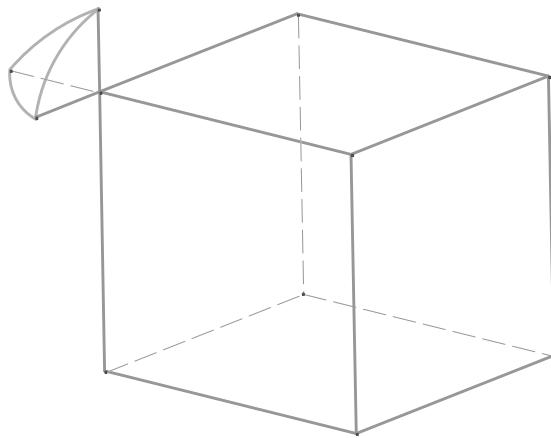


FIGURE 1.15 – *L'un des huit angles solides externes d'un cube*

b) Avant d'aborder le second point, regardons à nouveau soigneusement la figure précédente complétée par les sept autres polygones sphériques : si l'on translate ces huitièmes de sphère de façon à avoir le même sommet, on retrouve exactement, comme sur la figure de la page 7, une sphère entière d'aire égale à 8 droits.

Que dans ce cas l'égalité $4S - \Sigma = 8$ est donc devenue une « évidence », notre œil et notre imagination rendant cette égalité incontestable et donc vraie suivant le premier précepte du *Discours de la Méthode*.

La deuxième proposition admise est donc maintenant assez naturelle : nous considérerons comme acquis le fait que, **pour tout polyèdre, des translations convenables amenant les différents polygones sphériques à**

46. On peut également examiner ainsi un autre cas, encore assez simple, celui du tétraèdre régulier ($g_\omega = 3$, $\sigma_\omega = 2$, $d_\omega = 4$, $d_\omega - 2g_\omega + 4 = 2$, $4S - \Sigma = \mathcal{A} = \sum_\omega 2 = 8$).

avoir le même sommet conduisent à une partition de la sphère unité, et aboutissons par suite à l'égalité de Descartes

$$4S - \Sigma = 8$$

équivalente à la formule d'Euler.

Que la chose soit moins évidente pour l'espace que pour le plan (pour Euler que pour Proclus) résulte du fait que les sommets d'un polygone convexe peuvent être lus d'une manière séquentielle sautant aux yeux, tandis que le cas des polyèdres requiert le recours à deux paramètres : la perception forte de l'ensemble des translatés se réunissant de manière à former exactement une sphère est beaucoup plus subtile, et requiert une formalisation précise que nous avons décidé, pour ce livre, de laisser de côté.

Cette « longue chaîne de raisons », ou au moins d'intuitions géométriques fortes, était-elle accessible à l'auteur du *De Solidorum Elementis*? L'a-t-il effectivement mise en œuvre? Nous pensons que les réponses respectives à ces questions sont un oui pour la première et un non pour la seconde, en usant du principe de précaution historique pour cette dernière. En tout cas il valait la peine de voir comment, avec les lumières de notre temps, le difficile passage du plan à l'espace pouvait être rendu rationnel et pratiquement intuitif pour des hommes munis d'une forte capacité à « voir » en trois dimensions, ce que Descartes était sans nul doute même si ce Traité est l'un des très rares endroits où il nous l'a prouvé.

La technique eulérienne

Si la relation $S - A + F = 2$ porte le nom d'Euler, voire d'Euler-Descartes, c'est que le mathématicien bâlois est le premier à l'avoir explicitée (alors que Descartes s'était contenté d'en écrire une version équivalente beaucoup moins parlante⁴⁷) et souvent crédité du fait d'en avoir donné une preuve.

Si la direction qu'il a suivie était effectivement très prometteuse, elle reste insuffisante. Nous allons en donner ici une esquisse, assortie d'un contre-exemple incontournable. Bien que cette intuition soit très naturelle, nous pensons que Descartes ne l'a pas partagée, mais qu'il a plutôt suivi l'une

47. Restée inconnue jusqu'au dix-neuvième siècle.

des deux voies indiquées plus haut : l'invariance de $\frac{\Sigma}{p-2}$ ou au moins une partie de l'extension de notre preuve de Proclus de la page 7, résultant toutes deux d'une recherche directe de généralisation d'une technique éprouvée d'un espace de dimension deux (le plan) à un espace de dimension trois (l'espace usuel). Cela dit, regarder la démarche eulérienne n'est peut-être pas inutile, même dans le cadre de ce travail en principe limité à la première moitié du dix-septième siècle.

Amorcer une récurrence descendante

L'idée est parfaitement élémentaire⁴⁸ : ôter un sommet d'un polyèdre transforme le triplet (S, A, F) en $(S - 1, A - n - 1, F - n)$, ce qui laisse invariant $S - A + F$, et recommencer jusqu'à atteindre un tétraèdre pour lequel $(S, A, F) = (4, 5, 4)$ ⁴⁹.

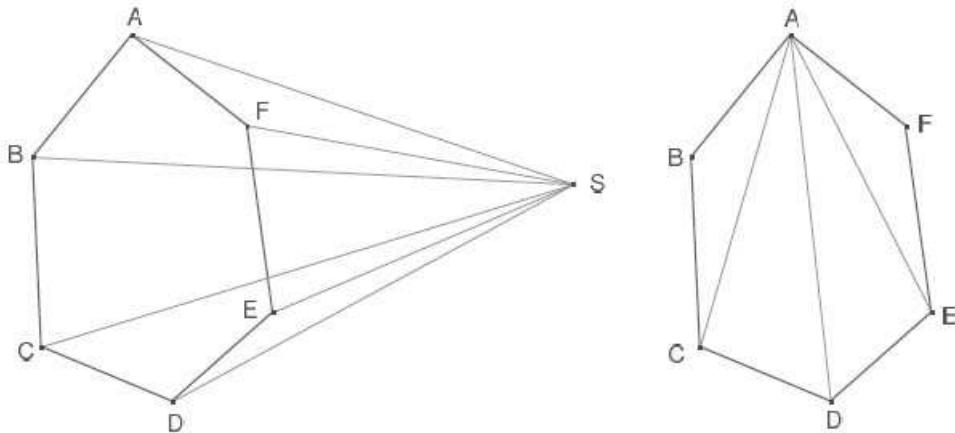


FIGURE 1.16 – *La stratégie d'Euler : ôter un sommet du polyèdre*

48. Il commence par déformer légèrement le polyèdre de départ en l'amenant à n'avoir que des faces triangulaires, par exemple pour un cube en poussant légèrement vers l'intérieur deux sommets symétriques par rapport au centre, mais c'est inutile pour tout ce qui suit.

49. Voir l'article déjà cité d'Henri Lebesgue *Remarques sur les deux premières démonstrations du théorème d'Euler*, tome LII (1924) du *Bulletin de la Société mathématique de France*, pages 315-36, repris dans le volume IV de ses *Oeuvres scientifiques* [*L'Enseignement mathématique*, Genève, 1973].

Certaines arêtes et/ou faces restent inchangées, d'autres disparaissent et de nouvelles apparaissent, comme on le voit par exemple sur un cube $[(S, A, F) = (8, 12, 6)]$ épointé : il reste 7 sommets sur 8, 9 arêtes et 3 faces subsistent, 3 arêtes et 3 faces sont perdues mais l'on récupère 3 nouvelles arêtes et 4 nouvelles faces, ce qui correspond à $(S, A, F) = (7, 12, 7)$ et donc à $n = -1$.

Continuer l'opération sur le cube maintenant épointé consiste, si l'on choisit de supprimer maintenant le sommet opposé au disparu, à une figure bien connue : un octaèdre (non régulier) avec $(S, A, F) = (6, 12, 8)$, puis une pyramide admettant un losange comme base avec $(S, A, F) = (5, 8, 5)$ et enfin un tétraèdre en choisissant d'enlever l'un des sommets du losange⁵⁰. Cela semble indiscutable, et c'est effectivement remarquable pour le dix-huitième siècle. Pourtant...

Un contre-exemple imparable

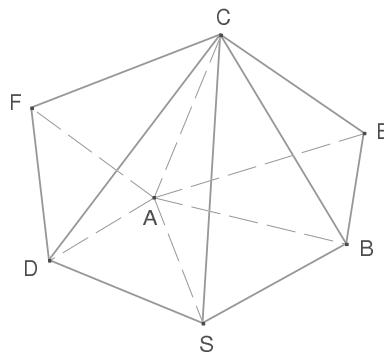


FIGURE 1.17 – Avant d'ôter S

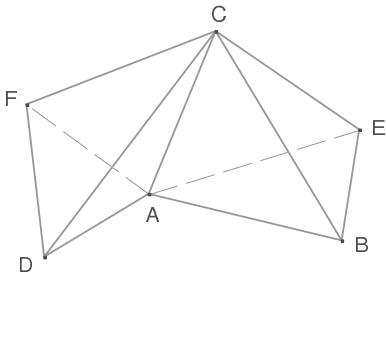


FIGURE 1.18 – Après avoir ôté S

La figure ci-dessus⁵¹ parle d'elle-même : à gauche un polyèdre convexe ; à droite, ce qu'il en reste lorsque l'on a enlevé un sommet S . On passe ainsi

50. Il existe bien sûr des variantes à cette suite de disparitions de sommets, mais elles donnent le même résultat final. Voir par exemple ce qui se passe si l'on enlève d'abord les deux sommets d'une même arête.

51. D'après l'article d'Henri Lebesgue cité plus haut, pages 328-9 et 224-5. La figure de droite - deux tétraèdres siamois - provient de l'article *Nachträge zu dem Euler'schen Lehrsatze von Polyédern* du *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 8, pp. 13-20, 1832, du cristallographe Johann Friedrich Hessel.

de $(S, A, F) = (7, 15, 10)$ à $(S, A, F) = (6, 11, 8)$, donc de $S - A + F = 2$ à $S - A + F = 3$. Mais surtout le résultat est, peut-être (?), encore un polyèdre - cela peut se discuter puisque l'arête BD est l'intersection des quatre faces BDA , BDC , BDE et BDF et non de deux - mais est en tout cas une partie *non convexe* de l'espace, bien qu'encore *connexe*.

Pour quels polyèdres la formule d'Euler est-elle vraie ?

La réponse est théoriquement simple : pour les polyèdres *simplement connexes*, définis par les conditions équivalentes suivante : leur *ordre de connexion* est $N = 1$ leur *genre* est $g = 0$, ce qui est normal car ces deux indicateurs sont liées par l'égalité $N = 2g + 1$.

Tout polyèdre convexe est simplement connexe ; la réciproque est fausse, car il peut y avoir des parties rentrantes qui, comme dans le cas des polygones et de Proclus, ne changent pas la relation d'Euler⁵².

Avant de donner les définitions de l'ordre et du genre, sans commentaires particuliers qui alourdiraient de façon exagérée de chapitre, donnons une toute autre définition de la *simple connexité* : *toute courbe fermée inscrite sur la surface* (on dit encore un *lacet* peut être réduite en un point unique par une transformation continue définie sur cette surface⁵³. Ce n'est par exemple pas le cas pour un *anneau* défini en détachant un « trou » de l'intérieur d'un disque ; la frontière de ce trou ne peut être réduite à un point. Cette définition topologique est évidemment plus claire que les textes historiques importants ci-dessous, qui s'appuient d'ailleurs en grande partie sur elle de façon plus ou moins visible.

Donnons d'abord un texte⁵⁴ d'Appell, Goursat et Fatou introduisant en 1895, bien sûr d'après des idées de Riemann⁵⁵, une présentation claire de l'ordre de connexité, dite ici *connexion*

52. Imaginer par exemple un cube auquel on enlève un cube plus petit, rogné dans l'un de ses huit coins de façon à ce que (S, A, F) passe de $(8, 12, 6)$ à $(14, 21, 9)$.

53. Variante (à préciser formellement) : une surface simplement connexe est telle qu'aucune *coupure* ne saurait la morceler.

54. *Étude des fonctions analytiques sur une surface de Riemann*, vol. I, chapitre V, pages 216 et 218, items 104 et 108.

55. Voir sa thèse de 1851, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen Grösse*.

« En général une aire plane à n contours est une surface connexe d'ordre n [...] Considérons en particulier une surface connexe⁵⁶ S , et supposons que cette surface puisse être décomposée en portions simplement connexes au moyen d'un nombre fini de coupures. Si ν coupures successives donnent α morceaux simplement connexes, le [...] nombre $N = \nu - \alpha + 2$ est appelé l'ordre de connexion de cette surface [...] le tore est une surface triplement connexe. »

Passons maintenant, pour le genre, à l'article fondamental déjà cité d'Henri Lebesgue, page 323 (219 dans les Œuvres)

« Nous appellerons surface de genre g toute figure en correspondance ponctuelle et biunivoque avec la surface particulière appelée disque à g trous (c'est-à-dire homéomorphe à cette surface) ; cette surface est constituée par deux domaines plans, identiques, superposés, limité chacun par g contours fermés, extérieurs les uns aux autres et intérieurs à un $(g+1)^{\text{ème}}$ contour fermé ; ces deux domaines plans sont soudés l'un à l'autre par les $g+1$ contours frontières, qui servent au passage d'un feuillet plan à un autre. Il suffit de démontrer la formule de Lhuillier⁵⁷ pour un tel disque divisé en polyèdre (Note : il est inutile de rappeler ici ce que l'on appelle polyèdre en Analysis situs). »

Muni de ces définitions de l'ordre de connexion N et du genre g , nous pouvons

56. C'est-à-dire telle que, pour tout couple de points sur elle, il existe un chemin continu inclus dans S dont ils sont les extrémités.

57. Simon Antoine Jean L'Huillier (1795-1840), professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève, a écrit un Mémoire sur la polyédrométrie ; contenant une démonstration directe du Théorème d'Euler sur les polyèdres, et un examen des diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti. Il ne nous est connu que par un commentaire de Joseph Diaz Gergonne (1771-1859) dans le volume 3 pour 1812-3 de ses Annales de Mathématiques pures et appliquées, pages 169-89. La technique est ici, non de supprimer des sommets successifs, mais au contraire d'agréger des polyèdres successifs en partant d'une pyramide. Il y est dit (page 186) qu'« en général un polyèdre terminé par une surface unique peut être percé, de part en part, par un nombre plus ou moins grand d'ouvertures distinctes. Si n désigne le nombre de ses ouvertures, on aura $F+S = A-2(n-1)$. Si l'on représente par V la valeur totale de la somme des angles des faces d'un tel polyèdre, on aura $V = 4(A-F) = 4[S+2(n-1)]$ ». Et ce bien avant la découverte du *De Solidorum Elementis* ! Dans ce même texte, on trouve aussi, page 176 item 4., une remarque de Gergonne selon laquelle, si un polygone enferme n polygones deux à deux disjoints et extérieurs l'un à l'autre (ce qui donne donc une plaque polygonale de genre n) de façon à dessiner en tout M segments, la somme de ses angles intérieurs vaut $2[M+2(n-1)]$ angles droits ; elle résulte d'ailleurs aussitôt de la première forme du théorème de Proclus.

écrire - sans preuve -la « bonne » extension⁵⁸ de la formule d'Euler

$$S - A + F = 3 - N = 2 - 2g.$$

Ainsi, pour une discréétisation convenable de la notion de *tore*, ou figure de la superficie d'un pneu, que l'on peut appeler *polyèdre torique*, qui est *triplement connexe*⁵⁹ puisque $N = 3$ dans ce cas.

Ces notions peuvent s'appliquer à des parties du plan supposées *doublées* (il existe deux feuillets identiques plaqués l'un sur l'autre, comme un tissu et sa doublure). La figure ci-dessous donne un exemple très simple, tiré de la traduction française des œuvres de Riemann, de partie plane triplement connexe : ici encore $N = 3$, puisqu'une première coupure ab crée un corridor reliant les deux trous, et - exactement comme sur le tore - la seconde cd crée une partie simplement connexe (mais évidemment non convexe, un peu comparable à une œuvre à la Miró).

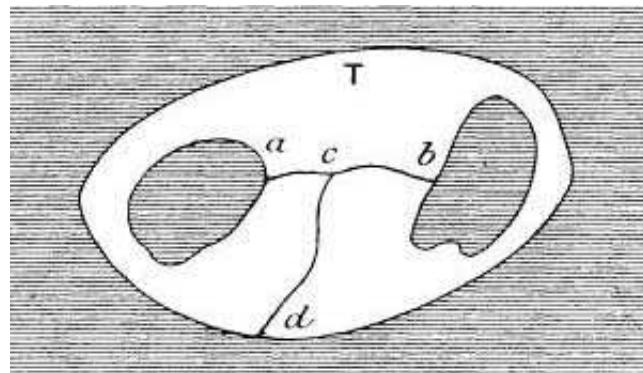


FIGURE 1.19 – Une aire plane triplement connexe (Laugel)

58. Elle peut elle-même être étendue à des espaces de plus grande dimension : voir Henri Poincaré, *Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres*, dans les pages 144-5 du volume 117 des *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences*, journée du 17 juillet 1893, et *Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de Géométrie*, pp. 113-7, vol. 140, 16 janvier 1905.

59. Imaginer une première coupure qui transforme le pseudo-tore en une surface pseudo-cylindrique, puis une seconde qui permet de l'aplatir ou à peu près, fournissant donc une surface simplement connexe en bout de travail.

Polyèdres réguliers et semi-réguliers

Ces polyèdres, encore appelés *platoniciens* et *archimédiens*, munis de nombreuses symétries et tous inscriptibles dans une sphère, jouent le premier rôle dans le *De Solidorum Elementis*.

La définition des premiers est très simple : ce sont les polyèdres dont les arêtes ont toutes même longueur, et dont les faces sont toutes des plaques polygonales régulières de même aire (donc de même nombre de côtés). Il n'y en a que cinq, déjà rencontrés plus haut⁶⁰; dans son texte, Descartes reprend d'ailleurs la recherche de ces solides remarquables, et retrouve le résultat de l'antiquité par une autre méthode.

Les treize autres seront listés plus bas. *Tous ces dix-huit polyèdres sont convexes, et donc simplement connexes* et obéissent par conséquent au théorème d'Euler. Tous vérifient également cette propriété remarquable : pour tout couple (ω, θ) de sommets, il existe une isométrie laissant invariant le solide et transformant en particulier l'angle solide d'origine ω et celui d'origine θ . C'est pourquoi l'on peut définir à leur sujet un marqueur dit *symbole de Schläfli*, auquel nous avons préféré la *configuration des sommets* : avec ce symbole, le ballon de football A_2 est bien caractérisé par le triplet $(5, 6, 6)$, ce qui signifie qu'en chaque sommet se réunissent, dans cet ordre⁶¹ un pentagone suivi de deux hexagones, ayant tous même longueur de leurs côtés.

Les corps platoniciens dans l'Histoire

Ces cinq *polyèdres de Platon*, encore appelés *polyèdres réguliers*, *solides platoniciens* ou même *corps cosmiques*, ont une très vieille existence. Pythagore lui-même connaissait sans nul doute au moins trois d'entre eux : le cube, le tétraèdre régulier et l'octaèdre ; un siècle plus tard Théétète aurait ajouté le dodécaèdre et l'icosaèdre à la liste. Enfin Platon, dans son dialogue *Le Timée*, leur consacre de nombreuses pages⁶². Il associe au tétraèdre le Feu,

60. Voir Euclide dans Vitrac IV 469 ou Heath III 507.

61. Ou l'inverse, selon le sens de description.

62. Voir notamment entre les références 53e et 56c. Pour être très précis, il faut dire que Platon parle surtout de quatre parmi eux, entre 54e et 55c, le dodécaèdre n'étant que très brièvement évoqué. C'est seulement à propos des quatre premiers qu'il écrit : « *Nous ne permettrons à personne de dire qu'on peut voir quelque part de plus beaux corps* » (53e).

à l'octaèdre l'Air, à l'icosaèdre l'Eau, au cube la Terre, laissant le dernier - le dodécaèdre - à l'Univers qu'Aristote appellera ensuite l'Éther. Parmi de très nombreux commentateurs, il faut surtout signaler Kepler qui les étudie systématiquement, ainsi que les polyèdres archimédiens, dans son *Harmonices Mundi* de 1619, après les avoir montrés encastrés en série⁶³ dans une illustration célèbre de la page 27 de son *Mysterium Cosmographicum* de 1596 destinée à représenter les orbites de certaines planètes.

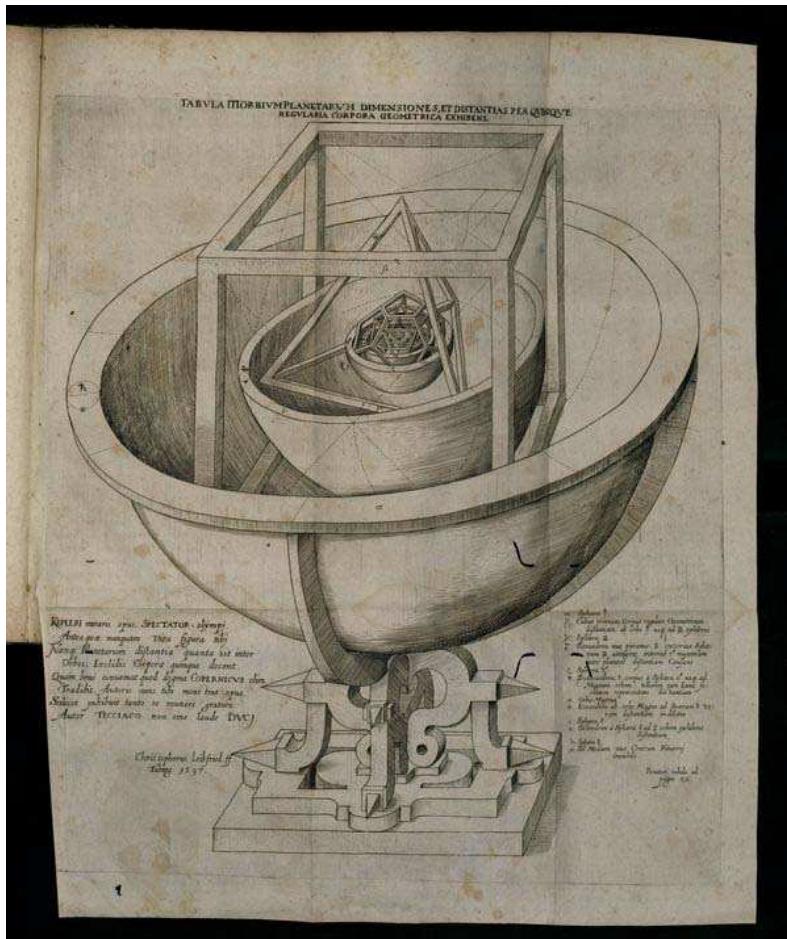


FIGURE 1.20 – Les solides de Platon imbriqués chez Kepler

Pour chaque polyèdre régulier, il existe un polyèdre régulier dont les sommets sont les centres des faces du premier : on l'appelle son *dual*. Le tétraèdre est

63. Plus précisément : Octaèdre \subset Icosaèdre \subset Dodécaèdre \subset Tétraèdre \subset Cube.

son propre dual ; le cube et l'octaèdre sont duaux l'un de l'autre, comme le sont le docécaèdre et l'icosaèdre. Cette propriété ne s'étend pas aux semi-réguliers, dont nous allons entreprendre la présentation.

Les treize corps archimédiens

Leur définition est très analogue, mais un peu moins simple : ce sont les polyèdres dont les arêtes ont toutes même longueur, et dont les faces sont toutes des plaques polygonales régulières, d'aires et de nombre de côtés non nécessairement égaux ; en particulier ils ne sont pas platoniciens.

Dans sa *Collection*, Pappus⁶⁴ nous apprend, sans démonstration⁶⁵, qu'Archimète avait déterminé les treize corps portant son nom. Sa liste, dans un ordre tout différent, sera reprise en 1619 par Kepler dans ses *Harmonice Mundi Libri V*, au Livre II, Proposition XXVIII, pages 61-5, leur imposant les patronymes qu'ils portent encore aujourd'hui, avec les illustrations remarquables ci-dessous extraits de ses pages 64 et 62

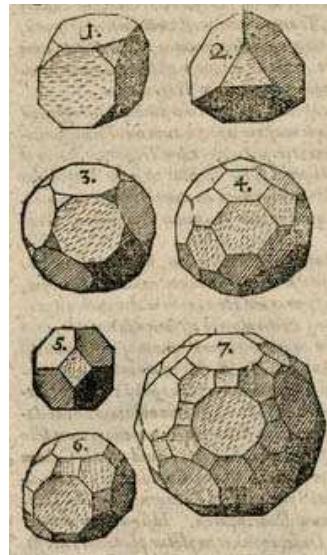


FIGURE 1.21 – Kepler (1-7)

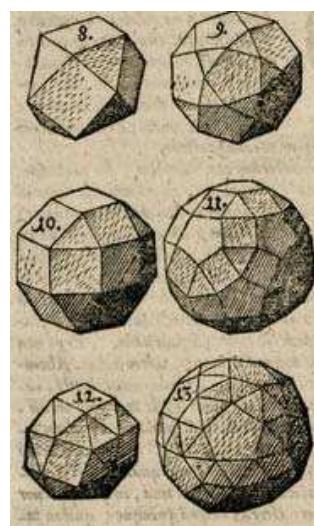
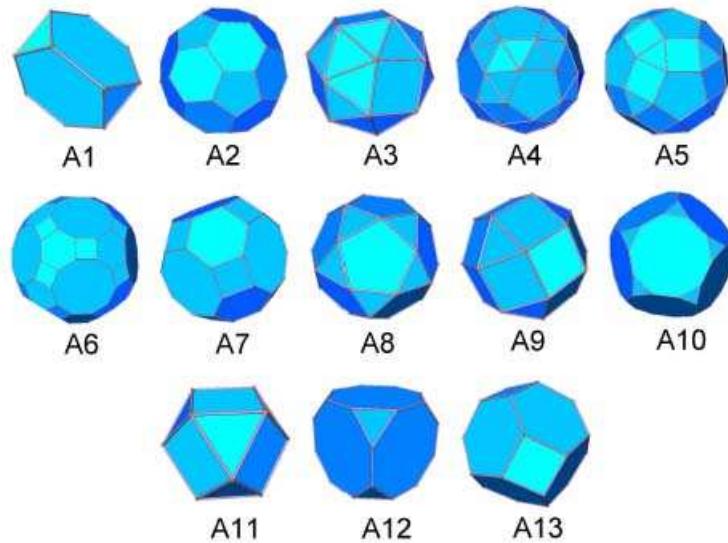


FIGURE 1.22 – Kepler (8-13)

64. Livre V Proposition XIX, pages 272-7 du premier volume de la traduction Ver Eecke.

65. Dans la partie III de ses *Commentaires* du *De Solidorum Elementis* (pages 56-64) Pierre Costabel justifie ce résultat.

Voici une figure de ces treize polyèdres archimédiens prouvant que ce très vieux concept est encore d'actualité, tirée d'un article de Salvatore Torquato⁶⁶ et Yang Jiao dans *Dense Packings of Polyhedra : Platonic and Archimedean Solids*, in *Physical Review E* 80, 041104 du 5 octobre 2009⁶⁷.



The 13 Archimedean solids: truncated tetrahedron (A1), truncated icosahedron (A2), snub cube (A3), snub dodecahedron (A4), rhombicosidodecahedron (A5), truncated icosidodecahedron (A6), truncated cuboctahedron (A7), icosidodecahedron (A8), rhombicuboctahedron (A9), truncated dodecahedron (A10), cuboctahedron (A11), truncated cube (A12), and truncated octahedron (A13).

FIGURE 1.23 – Les treize polyèdres archimédiens

Ce sont ceux que Kepler a numérotés respectivement 2, 4, 12, 13, 11, 7, 6, 9, 10, 3, 8, 1 et 5. Seuls *A3* et *A4* n'ont pas de centre de symétrie. On en trouvera un peu partout sur internet des croquis très parlants - parfois même susceptibles d'animation -, mais aussi dans de nombreux livres : voir en particulier les remarquables figures 24 à 36 (pp. 101-15) du livre de Federico⁶⁸.

66. Professeur de chimie et technologie des matériaux à Princeton.

67. Également disponible dans arXiv: 0909.0940v3 [math-ph] du 9 septembre 2009 (voir aussi *Nature* 460, pp. 876-9 du 13 août 2009).

68. Sa préface nous apprend qu'elles sont empruntées à l'intéressant livre *Archimède*,

Quelques points de vocabulaire : tout d'abord l'icosaèdre tronqué $A2$ est beaucoup mieux reconnu si on le traite de son nom vulgaire de *ballon de football*, ou - peut-être - de molécule du corps C_{60} , dite fullerène, dont la découverte en 1985 valut onze ans plus tard un prix Nobel à ses auteurs Harold Kroto et Rick Smalley⁶⁹.

De plus $A3$, le *snub cube*, s'appelle encore *cubus simus* (Kepler) ou, en français, cube *camard*⁷⁰. De même $A4$ s'écrit *dodecahedron simum* (Kepler) ou dodécaèdre *camard*. Ces deux corps ne figurent pas dans le *De Solidorum Elementis*. C'est sans doute ce qui a poussé, à tort croyons-nous, Pierre Costabel à écrire (page 105) que « *l'auteur ignore l'inventaire des semi-réguliers archimédiens*⁷¹ chez Pappus et Kepler. Et cette ignorance est inconcevable pour Descartes à partir de 1626 ». Nous pensons au contraire, même si Costabel se veut « impératif » (page 104), que cet oubli n'est pas involontaire, et qu'il résulte simplement de ce que, dans ces deux cas, les calculs auxquels il doit se livrer sont plus complexes que pour les onze autres ; leurs angles solides sont pentaédriques, ils ne peuvent être obtenus par troncatures à partir des platoniciens et leurs mesures contiennent au mieux des racines cubiques ou même une racine d'équation du douzième degré : ces raisons paraissent lourdement suffisantes pour justifier leur absence dans un cahier de calcul.

Enfin $A5$, $A6$, $A7$ et $A9$ s'appellent parfois *petit rhombicosidodécaèdre*, *grand rhombicosidodécaèdre*, *grand rhombicuboctaèdre* et *petit rhombicuboctaèdre*. Les deux corps $A6$ et $A7$ ne sont pas ignorés par Descartes (ils figurent, sans résultat de calculs pourtant faciles, à la toute dernière ligne de son texte)⁷². Enfin $A11$ est aussi (mais rarement) qualifié⁷³ d'*exoctaèdre*.

les treize polyèdres semi-réguliers publié (en grec) à Athènes en 1978 par Ioannes Papadatos. Voir également le chapitre consacré à Archimète par Heath dans son histoire des mathématiques grecques, vol. II, page 92.

69. Les mathématiques les plus désintéressées en apparence ont donc parfois de réelles et triviales retombées dans la vie quotidienne la plus ordinaire, plusieurs dizaines de siècles après l'ouverture de leur chantier... .

70. Synonymes : aplati, adouci, affadi, camus, écrasé, repoussé, retroussé... .

71. Redondance étonnante.

72. Pour être tout à fait complet, ajoutons que les calculs de « poids » concernant $A5$ et $A10$ manquent chez notre auteur, peut-être simplement par manque de temps pour Leibniz.

73. Chez François de Foix-Candale en 1566.

1.0.1 Quelques exemples

La figure suivante présente le dernier solide archimédien⁷⁴ décrit par Descartes dans sa liste qui forme la troisième et dernière partie du *De Solidorum Elementis*. Il possède 60 sommets, 120 arêtes et 62 faces, réparties en 20 triangles équilatéraux, 30 carrés et 12 pentagones réguliers.

L'un de ses noms est *Petit Rhombicosidodécaèdre*. Il est représenté par la figure 32 de la page 113 de Pasquale Joseph Federico ; chez Kepler, il est onzième, et trentième dans l'article de H.S.M. Coxeter, M.S. Longuet-Higgins et J.C.P. Miller *Uniform Polyhedra* à la page 439 du vol 246 (1953) des *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*.

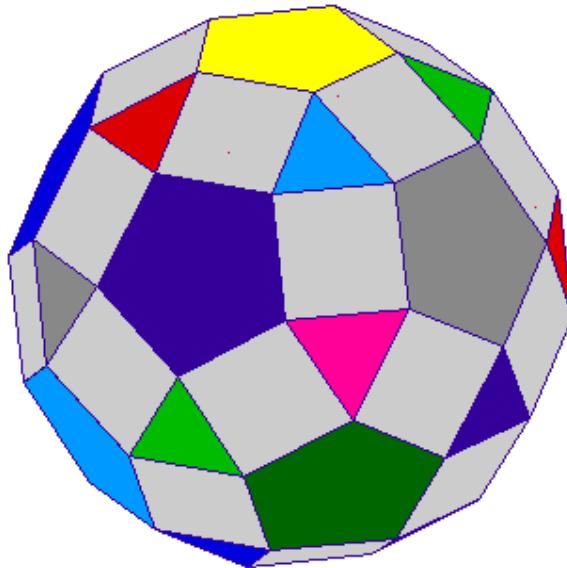


FIGURE 1.24 – *Petit Rhombicosidodécaèdre*

La figure suivante présente un autre solide archimédien signalé (mais non étudié) par Descartes en toute fin de liste. Il possède 48 sommets, 72 arêtes et 26 faces, réparties en 12 carrés, 8 hexagones et 6 octogones réguliers⁷⁵.

74. Le quatorzième donc de son tableau, puisqu'en tête figurent les cinq corps platoniciens et que les quatre derniers semi-réguliers ne sont qu'effleurés ou même absents. C'est le A5 de Torquato.

75. C'est le A7 de Torquato.

Son nom est *Grand Rhombicuboctaèdre* ou *Cuboctaèdre tronqué*. Il est représenté par la figure 33 de la page 113 de Pasquale Joseph Federico ; chez Kepler, il est sixième, et vingt-troisième dans l'article de H.S.M. Coxeter.

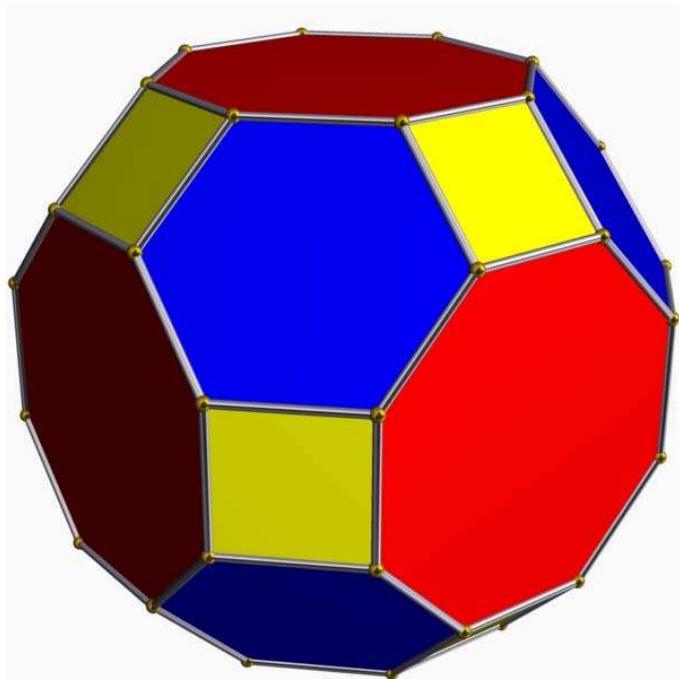


FIGURE 1.25 – *Grand Rhombicuboctaèdre* (ou *Cuboctaèdre tronqué*)

Un tableau de caractéristiques archimédiennes

Pour chaque polyèdre semi-régulier nous donnons ci-dessous, dans l'ordre de Descartes⁷⁶ fermant son Traité par une liste analogue, différentes indications : sa vertex configuration, son symbole de Torquato A_i , le triplet des nombres (S, A, F) de ses sommets, arêtes et faces - qui, à deux exceptions près, le caractérise -, le nombre de faces par sommet, puis le nombre de faces triangulaires, carrées, pentagonales, hexagonales, octogonales et décagonales et enfin la somme $\Sigma = \sum \sum \alpha (= 4S - 8)$ de ses angles avec, comme d'habitude, l'angle droit comme unité

76. À l'exception, bien sûr, des deux derniers.

	A_i	S	A	F	g	t	c	p	h	o	d	Σ
3,6,6	1	12	18	8	3	4	-	-	4	-	-	40
3,4,3,4	11	12	24	14	4	8	6	-	-	-	-	40
4,6,6	13	24	36	14	3	-	6	-	8	-	-	88
3,8,8	12	24	36	14	3	8	-	-	-	6	-	88
3,4,4,4	9	24	48	26	4	8	18	-	-	-	-	88
5,6,6	2	60	90	32	3	-	-	12	20	-	-	232
3,5,3,5	8	30	60	32	4	20	-	12	-	-	-	112
3,10,10	10	60	90	32	3	20	-	-	-	-	12	232
3,4,5,4	5	60	120	62	4	20	30	12	-	-	-	232
4,6,8	7	48	72	26	3	-	12	-	8	6	-	184
4,6,10	6	120	180	62	3	-	30	-	20	-	12	472
3,3,3,3,4	3	24	60	38	5	32	6	-	-	-	-	88
3,3,3,3,5	4	60	150	92	5	80	-	12	-	-	-	232

Voici, aux fins de comparaison, un tableau voisin concernant les polyèdres de Platon ; on y a remplacé l'indice de la nomenclature de Torquato par l'initiale du nom commun des tétraèdre, octaèdre, cube, icosaèdre et dodécaèdre⁷⁷

		S	A	F	g	t	c	p	Σ
3,3,3	T	4	6	4	3	4	-	-	8
3,3,3,3	O	6	12	8	4	8	-	-	16
4,4,4	C	8	12	6	3	-	6	-	24
3,3,3,3,3	I	12	30	20	5	20	-	-	40
5,5,5	D	20	30	12	3	-	-	12	72

77. L'ordre est celui de Descartes dans sa troisième partie (mais pas dans la deuxième).

Les prismes et antiprismes réguliers

Il existe encore d'autres polyèdres archimédiens, et même une double infinité, les *n-prismes* (implicitement réguliers) et les *n-antiprismes* ou *prismes tordus* (également réguliers), traditionnellement laissés à part⁷⁸ sauf par Costabel, qui les a retrouvés lors de sa recherche systématique (pages 60 et 63). Ils avaient pourtant été remarqués par Kepler, qui parle de classes *A* et *B* dans les Définitions X et XII (pages 49-50) et en représente quelques cas particuliers dans les figures placées entre ses pages 52 et 55, partiellement reproduits ci dessous

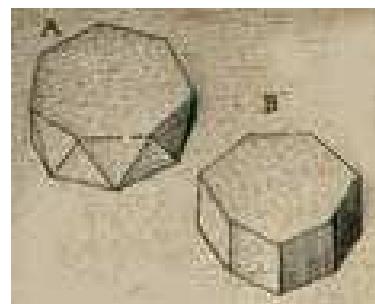


FIGURE 1.26 – L’hepta-antiprisme et l’hepta-prisme dessinés pour Kepler



FIGURE 1.27 – Le penta-antiprisme dessiné pour Kepler

Ces deux familles sont produites à partir de deux *n*-polygones réguliers réunis, soit par *n* carrés, soit par $2n$ triangles équilatéraux. Le 2-antiprisme est un tétraèdre, le 3-antiprisme est un dodécaèdre, alors que le 4-prisme est un cube. Le 5-antiprisme, particulièrement élégant, peut être obtenu à partir d’un icosaèdre dont on a enlevé deux angles solides symétriques.

⁷⁸. Par exemple dans le livre de Pasquale Joseph Federico qui n’y fait qu’une brévissime allusion page 118.

Voici enfin, sans preuve calculatoire, un tableau analogue aux précédents les concernant

	S	A	F	g	t	c	n	Σ
$4,4,n$	$2n$	$3n$	$n+2$	3	-	n	2	$8n-8$
$3,3,3,n$	$2n$	$4n$	$2n+2$	4	$2n$	-	2	$8n-8$

La première partie du texte cartésien

Nous allons suivre dans cette section le texte figurant en annexe, disséqué par paragraphe par paragraphe⁷⁹.

1. Pour Descartes, un angle plan droit est ce que l'on appelle aujourd'hui simplement un angle droit (de mesure $\frac{\pi}{2}$ en radians). Les dièdres d'un angle solide sont malencontreusement appelées ses « angles plans » dans ce premier paragraphe, mais cet usage, source d'obscurité, restera heureusement unique dans l'ensemble du texte.

La mesure d'un angle solide est l'aire de la partie qu'il découpe sur une sphère de rayon 1 centrée en son sommet comme, en géométrie plane, la mesure d'un angle est la longueur de la partie qu'il découpe sur un cercle de rayon 1. Ainsi la mesure de l'espace tout entier est-elle huit angles droits, celle d'un demi-espace quatre droits, comme en géométrie plane celle d'un plan est quatre droits et celle d'un demi-plan deux droits.

« Pris ensemble » est une expression ancienne pour désigner le résultat d'une addition, équivalente au terme d'« agrégat » que l'on trouve plus loin. Trois demi-plans deux à deux orthogonaux découpent un huitième de sphère, comme deux demi-droites perpendiculaires découpent un quart de cercle dans un plan. Il est facile de voir qu'un angle solide n'est droit (c'est-à-dire de mesure un droit) que si, et seulement si, la somme de

79. Nous ne possédons pas le manuscrit original. Leibniz, copiste pressé, n'ayant pas introduit de mise en pages, chacun des auteurs écrivant sur ce Traité imagine son propre découpage ; le nôtre est assez proche de celui de Costabel (au moins celui de sa traduction, différant légèrement du texte latin), et un peu plus éloigné de celui de Federico.

ses dièdres est égale à trois droits, soit $\frac{3\pi}{2}$ radians. Ce sont ces dièdres que l'on doit reconnaître sous la formule trop ambiguë « les angles plans qui le circonscrivent ». Cela résulte d'une formule donnant l'aire d'un triangle sphérique, établie au début de ce dix-septième siècle, publiée en 1629 par Albert Girard (*Invention nouvelle en Algèbre*), mais déjà connue de Thomas Harriot le 18 septembre 1603 (au plus tard).

En fait on peut penser que Descartes nous indique, par le mot « tout », qu'il ne se limite pas à des angles solides à trois faces, mais que le résultat vaut pour un nombre quelconque F de faces. Il faut alors généraliser le théorème de Girard en découplant le polygone en triangles⁸⁰; mais le résultat n'est plus exact, la valeur nécessaire et suffisante devant alors être égale à $2F - 3$, ce qui redonne bien 3 si $F = 3$. Une façon d'obtenir une règle absolument générale qui ne serait pas contredite par le texte, suggérée par Costabel, consiste à considérer non la somme des mesures des angles dièdres, mais celle de leurs « supplémentaires », c'est-à-dire de leurs compléments à 2 (ou à π si l'on prend le radian comme unité, ce qui est l'usage actuel).

Toute lecture qui consisterait à interpréter la somme des angles comme étant celle des angles faces serait inexacte : il existe de nombreux exemples d'angles solides droits dont la somme des angles faces n'est pas égale à 3, comme par exemple celui pour lequel les dièdres valent respectivement $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$ et $\frac{3}{4}$ droits, la somme des faces étant alors voisine de 3,24. C'est pourquoi Pasquale Joseph Federico va même jusqu'à remplacer *anguli plani* par *anguli planorum*, c'est-à-dire *angles plans* par *angles des plans*.

2. Un « corps solide » est ce que nous appelons « polyèdre », plus précisément un polyèdre convexe (cf. l'usage de ce terme pour un angle solide). Il possède des angles solides (et donc des sommets, mot dû à Cauchy en 1813), des arêtes, des faces, des angles faces et des dièdres. Descartes affirme, en fin de ce second paragraphe, qu'en tout sommet d'un angle solide la somme des mesures des angles faces est strictement inférieure à la mesure d'un demi-espace, soit quatre droits (c'est la proposition 21 du onzième Élément d'Euclide, avec démonstration limitée au trièdre),

80. Il a indiqué lui-même cette possibilité d'extension.

et appelle implicitement « courbure » en ce point la différence qui en résulte. Ce qu'il écrit en début de paragraphe s'interprète alors comme suit : la somme des courbures spatiales de tous les angles solides d'un polyèdre vaut huit droits, mesure de l'espace entier ; en chaque sommet, la courbure locale vaut donc $\frac{8}{S}$. Il semble que ce théorème n'ait pas été remarqué avant Descartes, qui en avait peut-être une preuve.

Comme nous l'avons dit plus haut, sa découverte résulte d'un passage par *analogie* du plan à l'espace : si l'on appelle *courbure* d'un angle d'un polygone convexe son complément à deux droits - mesure d'un demi-plan -, la somme de ces courbures planes est en effet quatre droits - mesure du plan entier (Proclus). L'emploi du mot « courbure » est raisonnable puisque, au voisinage d'un sommet donné d'un polygone ou d'un polyèdre, sa valeur est un bon indicateur du caractère plus ou moins aigu de sa forme. Mais une intuition, même appuyée sur quelques expériences, n'est pas une preuve.

3. Soient S le nombre de sommets (angles solides) d'un polyèdre convexe et σ la somme de toutes les mesures des angles faces, avec l'angle droit comme unité (par exemple $\sigma = 6 \times 4 = 24$ pour un cube, et $\sigma = 4 \times 2 = 8$ pour un tétraèdre). Descartes énonce ici, verbalement, l'égalité $4S - 8 = \sigma$ (écriture moderne) qui traduit la relation entre les courbures (Euler).

(Dans la marge de droite, Leibniz a écrit ici « *tetraèdre, cube, octaèdre* ».)

4. Descartes étudie, sur quelques cas particuliers, des relations entre le nombre S de sommets et celui des faces F (par exemple, pour un cube, on a $S = 8$, $F = 6$ et, pour un tétraèdre, $S = F = 4$). Il énonce que $S = F$ pour une pyramide, $\frac{S}{2} = F - 2$ pour un prisme et $\frac{F}{2} = S - 2$ pour la réunion de deux pyramides symétriques par rapport à leur base commune : c'est en effet géométriquement évident si l'on trace des figures. Apparaît ici pour la première fois une symétrie entre les nombres S et F . Puis il évoque - obscurément - d'autres types de polyèdres. À noter le mot *zone* (« *zona* » en version originale), qui figure trois fois chez Kepler (pages 57, 61 et 63) : est-ce un indice indiquant que Descartes avait bien eu son livre en main à l'époque de ce premier Traité ?

5. Descartes introduit le nombre des angles plans (angles faces) d'un polyèdre convexe, ceux dont la somme des mesures vaut σ . Nous le noterons ici B , définis aujourd'hui comme le double du nombre A des arêtes (« côtés »), intersections de deux faces appartenant chacune à deux angles solides. Descartes ne le dit pas ici, mais il énonce l'inégalité $B \geq 3S$, évidente puisque chaque sommet appartient à au moins trois arêtes.

Il signale également sans démonstration deux inégalités symétriques liant S et F , à savoir $2(S - 2) \geq F$ et $S \leq 2(F - 2)$ (la dernière inégalité étant présentée sous deux formes, à savoir $\frac{S}{2} + 2 \leq F$ si S est pair, et $\frac{S+1}{2} + 2 \leq F$ si S est impair), sans doute devinées à partir des égalités du paragraphe précédent. Ce sont des corollaires des relations $4S - 8 = \sigma$, $\sigma \geq 2F$, $\sigma = 2B - 4F$ et $B \geq 3S$: la première et la dernière figurent plus haut, la deuxième est évidente, et la troisième sera écrite plus bas.

On peut noter deux conditions nécessaires et suffisantes pour que ces inégalités soient des égalités : pour la première que toute face soit un triangle, et pour la seconde que tout angle solide soit un trièdre. Descartes les connaissait sans doute (en tout cas la première), et avait en tout cas sous la main les moyens de les prouver.

6. Ce sixième paragraphe peut être qualifié de « parenthèse » (Pierre Costabel) ; sans doute lui sert-il d'entraînement. Il introduit pour la première fois le problème de l'existence éventuelle d'une sphère contenant tous les sommets d'un polyèdre. L'aire latérale (« superficie convexe ») d'un tronc de cône de révolution d'arête latérale λ et de base de rayon ρ est égale à $\pi\lambda\rho$, alors que celle de la base vaut $\pi\rho^2$. Leur rapport est $\frac{\lambda}{\rho}$, c'est-à-dire $\frac{\sqrt{2}}{1}$ celui de la longueur de l'arête latérale au rayon, soit $\frac{\sqrt{2}}{1}$ si ses sections par un plan perpendiculaire à la base sont des triangles rectangles en son sommet.
7. Descartes introduit ici la lettre α et le signe cossique usuel désignant la variable (remplacé ici par n pour des raisons de meilleure lecture) pour ce que nous avons noté ci-dessus S et F . De façon originale, il déduit des inégalités précédentes qu'il existe au plus cinq polyèdres réguliers, déjà décrits et

classifiés dans *le Timée*. Ce résultat était clairement énoncé (mais insuffisamment justifié) par Euclide (proposition 18 du treizième Élément), qui avait prouvé leur existence par des constructions géométriques et des calculs complexes. L'importance du sujet est clairement indiquée par le fait que ces études constituent l'omega du dernier Élément d'Euclide : si l'existence du tétraèdre régulier, du cube et de l'octaèdre est un exercice facile, la situation est loin d'être aussi simple pour l'icosaèdre et le dodécaèdre.

La technique cartésienne est simple et repose sur les remarques suivantes : si un polyèdre est régulier et formé de p -faces, alors F divise

$$2S - 4 = \frac{\sigma}{2} = (p - 2) F$$

et, si tout sommet appartient à g faces, alors $B = gS$ et S divise

$$2F - 4 = B - 2S = (g - 2) S.$$

8. Dans ce huitième paragraphe, Descartes évoque allusivement l'existence éventuelle d'une sphère tangente à toutes les faces d'un polyèdre, auquel cas il est réputé la « circonscrire ». Le terme « rhomboïde », employé par Archimète et Kepler par exemple, a ici une signification obscure. De toutes façons, on ne peut accepter tels quels ses propos : ainsi est-il clair que toutes les pyramides n'admettent pas de sphère tangente, même si c'est vrai de tous les tétraèdres.
9. Ce neuvième paragraphe est consacré à un autre problème : celui de l'existence, tout aussi éventuelle, d'une sphère circonscrite, c'est-à-dire contenant tous les sommets d'un polyèdre, qui lui est alors « inscrit ». Sont données plusieurs conditions nécessaires, mais non suffisantes. On peut noter que tous les polyèdres réguliers et semi-réguliers (étudiés dans la seconde partie) sont inscriptibles dans une sphère.
10. Il s'agit dans ce dixième paragraphe d'une conséquence arithmétique simple de l'égalité $\sigma = 4S - 8$.
11. Est indiquée maintenant l'égalité $4F + \sigma = 2B$. Contrairement à la précédente, sa preuve (non donnée par Descartes) est facile et repose sur le fait élémentaire que la somme des angles intérieurs à un polygone convexe

à p côtés est égale à $(p - 2)\pi$ radians, soit $2p - 4$ angles droits. Elle est utilisée dans le cas particulier $\sigma = 72$ et $F = 12$, d'où $B = 60$ (qui correspond par exemple à un dodécaèdre).

12. De l'égalité énoncée ici ($B = 2A$ où A est le nombre d'arêtes du polyèdre et de celles qui précédent ($F + \sigma = 2B$ et $\sigma = 4S - 8$), l'on pourrait immédiatement déduire la relation d'Euler $S + F = A + 2$, mais cela ne sera pas explicité par Descartes.

Il remarque que, lorsque toutes les faces sont des polygones à p côtés, F divise B (alors égal à pF), puis il étudie sur le cas particulier $B = 18$ et $F = 5$, les valeurs possibles des nombres de faces triangulaires, quadrilatères, pentagonales etc. du polyèdre considéré. Il ne donne que des conditions nécessaires liant ces nombres, pas toujours suffisantes et affirme sans preuve que l'on n'a que trois possibilités, qu'il explicite. Une démonstration repose sur des inégalités arithmétiques, élémentaires mais un peu lourdes à manipuler. La condition supplémentaire $S = 6$, résultant de la relation d'Euler, permet de réduire les trois branches de cette alternative à une seule (la première, réalisée par exemple dans un prisme dont les bases sont des triangles équilatéraux et les faces des carrés, mais cela n'est pas dit).

Les points de suspension terminant le paragraphe marquent un certain embarras, soit de l'auteur, soit du copiste : en fait, il semble vraisemblable qu'ils aient figuré dans le manuscrit cartésien (cf. Pierre Costabel).

13. Ce treizième paragraphe signale plusieurs relations possibles d'« égalité » entre deux angles solides en plus de la congruence euclidienne usuelle, selon que les polygones qu'ils interceptent sur des sphères centrées en leurs sommets ont mêmes nombres de côtés, ou mêmes périmètres, ou enfin - le cas le plus intéressant - mêmes aires.
14. De même que l'aire d'un disque est supérieure à celle de tout polygone qui lui est inscrit, la « capacité » d'un angle conique est supérieure à celle de tout angle solide qui lui est inscrit. Il faut cependant noter qu'un cône ne possède pas un nombre fini de faces, mais est un cas limite d'angle solide.

15. On revient à des considérations générales sur le nombre F des faces des polyèdres dont on connaît le nombre S de sommets. Ici Descartes note ces deux nombres par les symboles φ (remplaçant notre n) et α . Il se place d'abord dans le cas où toutes les faces sont triangulaires, pour lequel $\varphi = 2\alpha - 4$, d'où $B = 6\alpha - 12$ puisqu'ici $B = 3F$. L'expression « il faut compter un angle pour deux tiers de droit » est maladroite, le nombre $2/3$ n'étant qu'une valeur moyenne pour un angle d'un triangle, mais le sens est bien ce que nous avons noté $B = 3F$.

Descartes vise ici le cas plus restreint d'un polyèdre à faces triangulaires dont les angles solides ont tous même nombre de faces (l'icosaèdre est un exemple) : en chacun de ses sommets, il y a $k + 3$ faces, avec $k \geq 0$, et la différence $3S - 12 = B - 3S = kS$ est également distribuée entre les S sommets. Il rappelle, au passage, l'inégalité générale $B \geq 3S$.

Ces deux lignes très denses introduisent en particulier à l'égalité générale $B = 2F + 2S - 4$ qui, si elle était jointe à l'égalité $B = 2A$, constitueraient enfin, aux yeux d'un moderne, la première écriture de la relation d'Euler. Découlant aussitôt des égalités précédentes $\sigma = 4S - 8$ et $2B = 4F + \sigma$, elle n'a pas vraiment besoin de preuve.

Descartes énonce, également sans preuve, l'inégalité $B \leq 6S - 12$; il l'avait peut-être déduite des relations

$$4S - 9 = \sigma = 2B - 4F \geq \frac{2B}{3}$$

et $B \geq 3F$, cette dernière, symétrique de $B \geq 3S$, résultant trivialement du fait que toute face a au moins trois angles. Il en découle un excès du maximum possible sur le « vrai » nombre de faces, soit $(6S - 12) - B = 4S - 8 - 2F$. Le signe + devant le 4 signifie sans doute que cette quantité doit être ajoutée à la valeur effective pour obtenir le maximum.

16. Cette remarque du sixième et dernier paragraphe sur les rhomboïdes inscriptibles dans une sphère, tout aussi discutable dans sa conclusion que celle déjà rencontrée sur un sujet analogue, semble de plus mal placée. Était-ce une amorce d'une étude ultérieure ?

En conclusion : dans cette première partie, très originale, mal organisée, extraordinairement rapide là où il aurait fallu de nombreuses explications -

justifiant malheureusement la longueur de nos commentaires - Descartes a introduit de nombreux concepts (mais pas celui du nombre d'arêtes) dont, surtout, une relation équivalente au théorème d'Euler.

Son plus grave défaut, avant même sa concision parfois insupportable, est évidemment le manque de preuve de son égalité fondamentale $\sigma = 4S - 8$. Nous avons dit plus haut que nous ne pouvions pas nier absolument que Descartes en ait possédé une, en donnant même deux embryons de pistes. Après tout, nous n'avons ici qu'un brouillon ; pour une éventuelle publication, son auteur aurait pu y ajouter des éléments permettant de mieux accepter une formule comme celle de *théorème de Descartes-Euler* qu'à regret, nous séparant ici un peu de Pierre Costabel, nous nous voyons contraint de rejeter (au moins jusqu'à une éventuelle et improbable découverte de textes complémentaires allant dans son sens).

Nombres figurés polygonaux et gnomons

La deuxième partie du Traité cartésien est consacrée aux « **poids** » de certains objets géométriques, d'abord plans puis solides dans l'espace. Cette notion est très délicate à définir simplement.

Pour y parvenir en restant à peu près lisible nous devons, comme Descartes lui-même, en premier lieu traiter des *nombres figurés polygonaux*, auxquels Diophante - par exemple - a consacré tout un Traité⁸¹ aux environs de 250 après Jésus-Christ, dont l'étude repose sur le mot clef de la deuxième partie du texte cartésien, à savoir **gnomon** : $\gamma\nu\omega\mu\omega\nu$. Il est introduit très tôt par Euclide, plus précisément dans la deuxième Définition de son Deuxième Élément

*« Dans toute aire parallélogramme, que l'un quelconque des parallélogrammes qui entourent la diagonale pris avec les deux compléments soit appelé gnomon »*⁸².

81. Le Livre des nombres polygones. mais il était loin d'être le seul. Ainsi, aux environs de l'an 100 après Jésus-Christ, Nicomaque de Gerasa avait déjà publié une *Introduction à l'Arithmétique* dans laquelle il étudiait également quelques propriétés de ces nombres, ainsi que des *pyramidaux*, que nous retrouverons au moment de l'étude des nombres polyédraux par Descartes.

82. Éd. Vitrac, vol I, p. 325 ; Heath, vol. I, p. 370.

Dans l'une des figures ci-dessous, la plaque polygonale $ABEHGI$ est un tel gnomon, en forme d'équerre.

**2. En tout parallélogramme, l'un des parallélogrammes
descrits à l'entour du diamètre, avec les deux supplemens,
est appellé Gnomon.**

FIGURE 1.28 – La Définition p. 82 de l'édition Didier Henrion de 1632

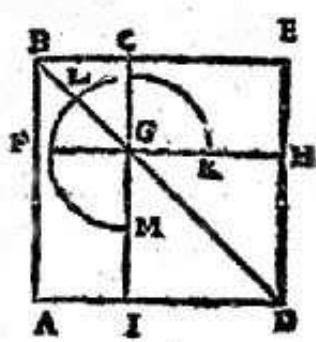


FIGURE 1.29 – Dans la figure d'Henrion, les parallélogrammes sont carrés

Héron d'Alexandrie, vers la fin du premier siècle après Jésus-Christ, a écrit⁸³ qu'un gnomon est essentiellement une figure ou un nombre qui, ajouté à un objet initial, l'agrandit en taille mais respecte sa forme⁸⁴. C'est donc un appareil créateur de similitude (de ressemblance), comme l'équerre déjà signalée. Dans son sens général, hors mathématique, le mot désigne « ce qui discerne », ou « ce qui règle »⁸⁵; son emploi mathématique en dérive mais de façon assez complexe.

Ces gnomons, numériques dans ce cas, sont à la base de la théorie des nombres polygonaux (ou figurés de manière plus générale, car étendus plus loin à l'espace). Donnons d'abord un exemple très parlant, qui nous évitera de donner une définition très générale mais nécessairement bien lourde.

83. En fait, cette attribution n'est pas tout à fait certaine, Diophante - par exemple - en aurait pu être l'auteur.

84. Notre traduction est ici volontairement libre aux fins de clarté du texte.

85. Nous suivons ici Vitrac, p. 326. Voir aussi les pp. 370-2 de Heath, qui détaillent assez bien ce que l'on peut dire des vicissitudes du mot.

La figure suivante est assez claire : elle indique les cinq premiers nombres pentagonaux 1, 5, 12, 22 et 35 (lisibles sur les côtés de cinq pentagones⁸⁶ inclus les uns dans les autres). Ces nombres sont de la forme générale

$$O_n^5 = \frac{n(3n - 1)}{2};$$

ils s'obtiennent l'un après l'autre par des ajouts successifs de gnomons égaux à $\Gamma(n) = O_n^5 - O_{n-1}^5 = 3n - 2$: en particulier le passage du quatrième au dernier pentagone s'obtient par l'ajout d'un gnomon de 13 points, à savoir trois suites de cinq points privé de deux d'entre eux⁸⁷ comptés deux fois.

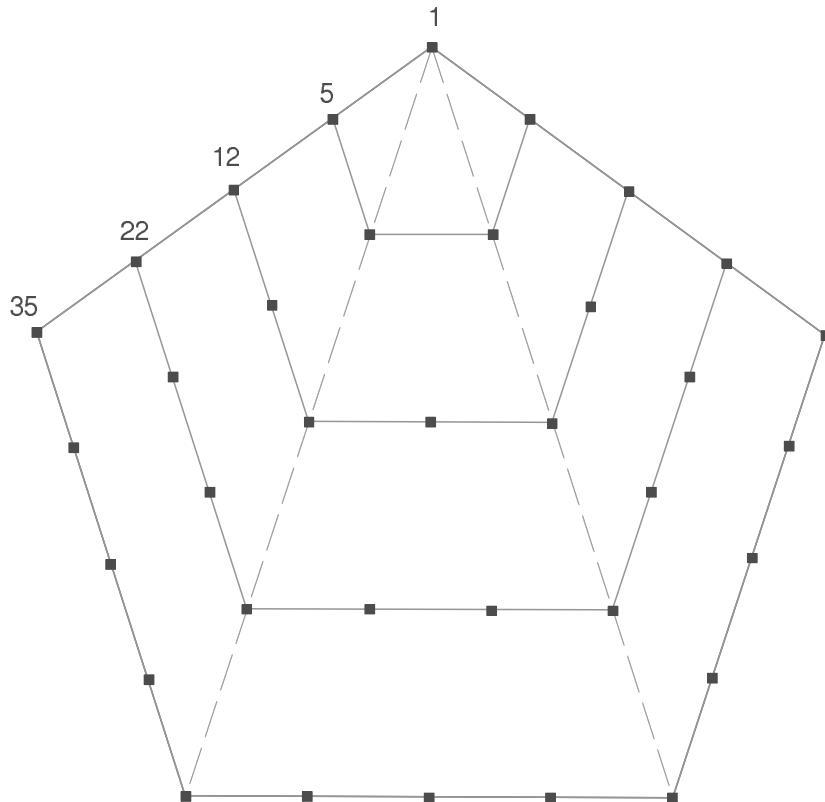


FIGURE 1.30 – Les cinq premiers nombres pentagonaux ($p = 5$)

86. Sans doute le fait de considérer un simple point comme un pentagone de côté nul est-il un peu limite, mais c'est l'usage.

87. Ces points spéciaux sont bien évidemment les sommets de la ligne polygonale du bas de la figure, en forme d'équerre à trois segments.

D'une manière générale, suivant ici Pierre Costabel pour sa notation assez commode, on se doit de noter une série d'égalités remarquables, très simples, comme les suivantes

$$O(n) = O_n^p \quad [= p(p, n) \text{ chez P.J. Federico}]$$

$$\Gamma(n) = O(n) - O(n-1) = R(n) - A(n) = (p-2)n - (p-3) \quad [= p(n-1) - 2n + 3].$$

$$O(1) = 1, \quad \Gamma(2) = p - 1, \quad O(2) = p,$$

$$\begin{aligned} O(n) = O_n^p &= (p-2) \frac{n(n+1)}{2} - (p-3)n = \frac{p-2}{2}n^2 - \frac{p-4}{2}n \\ &= \frac{n(n-1)}{2}p - n(n-2) = n + (p-2) \frac{n(n+1)}{2} = n^2 + (p-4) \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{On dispose également de la relation } O_n^{p+1} - O_n^p = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Le tableau ci-dessous, très facile à dresser par récurrence, donne les premières valeurs des nombres pentagonaux, que nous pouvons - dans l'esprit de Descartes - appeler les *poids* des polygones réguliers

O_n^p	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	10	16	22	28	34	40	46	52
5	15	25	35	45	55	65	75	85
6	21	36	51	66	81	96	111	126
7	28	49	70	91	112	133	154	175
8	36	64	92	120	148	176	204	232
9	45	81	117	153	189	225	261	297
10	55	100	145	190	235	280	325	370

Exemples : $O_n^3 = \frac{n(n+1)}{2}$, $O_n^4 = n^2$ (les nombres carrés sont les carrés!), $O_n^5 = \frac{n(3n-1)}{2}$, $O_n^6 = n(2n-1)$, $O_n^8 = n(3n-2)$ et $O_n^{10} = n(4n-3)$; de même $O_1^p = 1$, $O_2^p = p$, $O_3^p = 3(p-1)$, $O_4^p = 2(3p-4)$, $O_5^p = 5(2p-3)$ et $O_6^p = 3(5p-8)$.

Rappelons la technique à la base de la théorie de ces nombres : partant de figures très régulières - ici les polygones bien connus de tous - on les remplit par des alignements très symétriques de plus en plus riches, en passant d'une étape à la suivante par l'adjonction de gnomons judicieusement adaptés. Nous allons - avec Descartes - garder la même ligne, mais appliquée cette fois-ci à des polyèdres, ce qui fera le lien avec la première partie de son Traité.

Dans son texte, Descartes fournit un tableau, de lecture *a priori* obscure⁸⁸, censé donner un algorithme de calcul par récurrence des premières valeurs des entiers O_n^p pour $1 \leq n \leq 4$ et $3 \leq p \leq 6$

$R - A$,	O						
1 - 0,	1	2 - 1,	1	3 - 2,	1	4 - 3,	1
2 - 0,	3	4 - 1,	4	6 - 2,	5	8 - 3,	6
3 - 0,	6	6 - 1,	9	9 - 2,	12	12 - 3,	15
4 - 0,	10	8 - 1,	16	12 - 2,	22	16 - 3,	28

Un coup d'œil permet de comprendre qu'une ligne (*resp.* un groupe de trois colonnes) est associée à une valeur de n (*resp.* p), les nombres figurant sous les lettres O étant exactement les O_n^p . En fait, O_n^p est la somme du précédent O_{n-1}^p et de la différence $R - A$ située à sa gauche : ainsi $28 = 15 + (16 - 3)$. Cette différence est donc le gnomon $\Gamma(n)$. Cela se retrouve aussitôt en notant que $R = (p - 2)n$ et $A = p - 3$, ce qui donne bien $\Gamma(n) = R - A$.

La justification géométrique de cette dernière égalité est finalement assez simple : ce gnomon est le nombre de « perles » de la réunion de $p - 2$ segments (nombre des arêtes autres que celles qui contiennent l'origine à partir de laquelle on empile les gnomons), qui en contiennent chacun n , diminué du nombre $p - 3$ de sommets comptés chacun deux fois dans le produit $(p - 2)n$. Cette technique d'analyse combinatoire élémentaire sera étendue par la suite aux calculs des poids numériques des polyèdres platoniciens et archimédiens pour construire des tableaux analogues.

88. Dans l'édition de Federico, pages 25 ou 92, une faute typographique obscurcit encore cette présentation : la lettre O , associée aux valeurs de $O(n)$, y est remplacée à quatre reprises par le nombre 0, ce qui n'a pas de sens ici. De plus, dans la traduction - page 92 -, les quatre groupes de trois colonnes sont chapeautés par les mots *Triangular*, *Cubic*, *Pentagonal*, *Hexagonal*, absents du texte leibnizien, ce qui constitue un lapsus stupide pour le second d'entr'eux).

Il existe beaucoup de propriétés des nombres polygonaux. Signalons la suivante : dans ses commentaires sur une remarque de Bachet à propos du problème XXI du quatrième Livre de Diophante, repris dans une lettre à Mersenne de septembre 1636⁸⁹ Fermat disait pouvoir prouver que tout entier est somme de trois triangulaires, quatre carrés, cinq pentagonaux etc⁹⁰. Il avait par ailleurs, toujours dans ses commentaires sur Diophante à propos du problème 27 de Bachet⁹¹, donné l'équivalent verbal de la formule exacte

$$O_n^p = n^2 \frac{p-2}{2} - n \frac{p-4}{2}.$$

N'abandonnons pas les nombres polygonaux sans rappeler que Johann Faulhaber (1580-1635), mathématicien à Ulm, contemporain de Descartes qu'il a presque sûrement rencontré vers les années⁹² 1619-20, qui aurait travaillé sur eux dans un traité connu sous le nom de *Numerus figuratus, sive Arithmetic a analytica arte mirabili inaudita nova constans* publié en 1614 à Francfort. Il y a même trace, dans ce texte⁹³, de neuf nombres figurés (pyramidaux) issus de l'espace et non plus du plan : comme nous l'avons déjà signalé, Nicomaque s'y était intéressé⁹⁴. Descartes, sans les citer, leur donnera une extension bien plus riche et surtout plus systématique dans la seconde partie de son *De Solidorum*.

89. Voir ses Œuvres, vol. I p. 305, vol. II p. 65, vol. III pp. 252 et 286, ou la compilation du professeur toulousain Émile Brassinne (1805-1884) p. 82.

90. Il faudra attendre 1813 pour obtenir une preuve complète par Cauchy : voir sa *Démonstration du théorème général de Fermat sur les nombres polygones*, pp. 320-53 du vol. VI de la deuxième série de ses Œuvres.

91. Voir les pages I 341, III 273, Brassinne 130.

92. Voir l'importante page 192 (et *sq.*) du remarquable livre *Descartes en Allemagne : 1619-1620* d'Édouard Mehl, où apparaît un certain Carolus Zolindius (Polybius), qui renvoie clairement à la page 214 de AT X des *Cogitationes Privatae*. Un livre incontournable est le *Johannes Faulhaber 1580-1635 : Rechenmeister in einer Welt des Umbruchs* de l'allemand Ivo Schneider ; voir également divers articles de l'américain Kenneth Lawrence Manders, qui travaille également sur le couple Descartes-Faulhaber.

93. Peut-être en fait écrit par son ami Johann Remmelin, ce qui ne détruirait pas le fait que Faulhaber ait été à la barre dans cette recherche.

94. Il peut être intéressant de dire que Fermat, dans sa lettre à Mersenne signalée plus haut, avait déjà noté par exemple une de leurs propriétés : ainsi (pp. II 70, III 291, Brassinne 129) note-t-il qu'on a le triple du poids de la pyramide - silencieusement supposée de base triangulaire - en multipliant son paramètre n par le successeur du son triangulaire, c'est-à-dire $3P_n^3 = nO_{n+1}^3 (= n(n+1)(n+2)/2)$. *Idem* dans la lettre du 4/11/1636 à Roberval : pp. II 84, III 291, Brassinne 138.

Nombres figurés polyédraux et gnomons

Nous avons vu que chez Nicomaque déjà avait été tentée, avec l'introduction de certains nombres pyramidaux, une extension à l'espace. C'est toutefois chez Descartes, quinze siècles plus tard, que l'on trouve une généralisation plus riche et très originale, qui constitue le cœur de la seconde partie de son *Traité*. Mais si l'on pouvait plus ou moins adapter le concept de nombre polygonal à des polygones non réguliers (convexes en tout cas pour l'essentiel), il faudra ici se limiter à considérer des polyèdres réguliers, bien peu nombreux, heureusement enrichis par la considération de la famille archimédienne, de manière à disposer d'un corpus assez riche (dix-huit solides en tout si l'on excepte les deux familles infinies de prismes et d'antiprismes, ignorées par l'auteur.).

L'idée est toujours la même : puisqu'on enrichissait une certaine configuration de O_n^p points, voire de « perles », en élargissant la figure par coagulation d'un gnomon formé de plusieurs arêtes comportant n items régulièrement placés, le passage à l'espace se traduira, pour le passage du paramètre $n - 1$ à la valeur suivante n , par un choix initial d'un sommet de l'un des dix-huit polyèdres en cause⁹⁵, puis par le plaquage de certaines faces régulières ne contenant pas le sommet elles-mêmes revêtues d'une configuration polygonale formée de O_n^p points.

La mise en œuvre et le calcul des cardinaux des ensembles ainsi définis sont toutefois bien plus complexes que pour les polygones ; heureusement le cas particulier des polyèdres de Platon est moins complexe, et c'est par lui que nous commencerons à décrire le mécanisme de calcul des poids numériques cartésiens pour l'espace.

Nombres polyédraux platoniciens

Les cas les plus abordables pour une première étude sont évidemment ceux de deux des polyèdres réguliers les plus élémentaires : le cube et le tétraèdre. Au départ, on veut définir un poids cubique comme étant tout simplement égal à n^3 , puisque le carré, analogue du cube pour le plan, était affublé du

95. Ce choix est sans importance fondamentale puisque dans ce cadre limité il existe toujours un déplacement transformant un tel sommet et son voisinage en un autre.

nombre $O_n^4 = n^2$. Nous verrons que c'est effectivement bien le cas ; toutefois il est encore plus simple de commencer avec le tétraèdre.

Une idée bien naturelle consiste à considérer que pour $n = 1$ le poids voulu est égal à 1, et qu'il vaut 4 pour $n = 2$; tout cela est parfaitement dans la ligne de la figure des premiers nombres pentagonaux de la page 50.

Reste à définir le passage par récurrence de $n - 1$ à n . Ici aussi l'opération s'impose d'elle-même : *il suffit d'ajouter* au modèle associé à $n - 1$ un socle formé de O_n^3 points pour obtenir le modèle régulier associé au successeur n . Ainsi le décompte des premiers nombres tétraédriques est-il élémentaire ; puisque le gnomon vaut $\frac{n(n+1)}{2}$, on obtient instantanément la suite

$$1, \quad 4, \quad 10, \quad 20, \quad 35, \quad 56, \quad 84, \dots$$

où l'on reconnaît les valeurs $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ pour $n \leq 1$. La figure ci-dessous vaut pour $n = 5$.

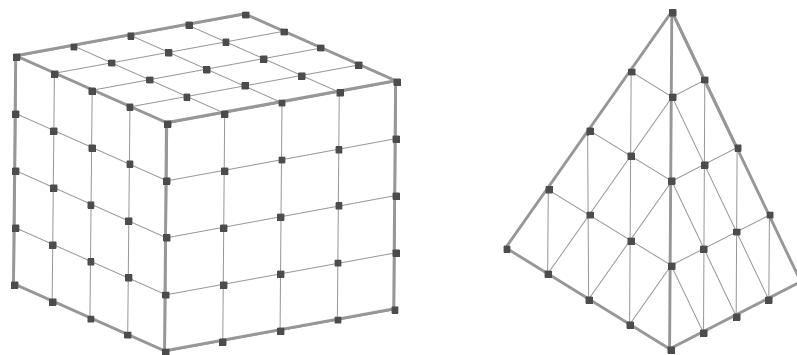


FIGURE 1.31 – Nombres polyédraux cubiques et tétraèdriques
(61 et 25 de ces « perles » sont vues ; 64 et 10 sont cachées)

Sur cette même figure, toujours pour $n = 5$, on voit l'empilement fort naturel de $n^3 = 125$ points simplement répartis en cinq couches de $n^2 = 25$ points (dont plus de la moitié est cachée). Mais l'étude de cette configuration pourtant *a priori* totalement évidente demande un tout petit peu plus de soin que dans le cas précédent : cela est d'ailleurs heureux, puisque nous serons ainsi un peu mieux préparés à la complexité générale.

Imaginons par exemple que nous choisissons comme sommet origine celui qui est situé le plus haut, et que l'on ait construit le modèle pour quatre couches. Le passage à cinq ne peut se faire, comme pour le tétraèdre, par adjonction d'une simple face supplémentaire : il faut un gnomon formé de trois de ces faces. Ce nombre vaut $3 = 6 - 3$, à savoir le nombre total de faces diminué de celles qui ne contiennent pas le sommet choisi. La valeur numérique du gnomon géométrique doit donc ressembler à $3O_5^4 = 75$. Mais nous avons compté trop large, puisque chacun des points des trois arêtes de ce gnomon est compté deux fois, à l'exception du sommet (diamétralement opposé au sommet choisi), trois fois compté, trois fois retiré. Ainsi le véritable nombre est-il $3O_5^4 - 3 \cdot 5 + 1 = 61$. Un instant de réflexion permettra au lecteur de se convaincre que la présence de l'entier 61 à deux endroits voisins de notre texte n'est pas uniquement fortuite... Ces gnomons rentrent dans la formule $3n^2 - 3n + 1$, bien facile à justifier à partir du cas $n = 5$. Or nous savons que $3n^2 - 3n + 1 = n^3 - (n - 1)^3$, ce qui justifie bien la liste des nombres cubiques ainsi déterminés

$$1, \quad 8, \quad 27, \quad 64, \quad 125, \quad 216, \quad 343 \dots$$

Une fois armés par cette étude des deux poids platoniciens les plus simples, il nous reste à déterminer ceux qui sont associés à l'octaèdre, au dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers.

Nous nous contenterons de donner l'idée générale, en appelant

- ω un sommet (pris au hasard)
- Ω la surface obtenue par réunion des faces contenant ω
- S le nombre des sommets du polyèdre
- A le nombre d'arêtes du polyèdre
- F le nombre des faces du polyèdre
- $p = 2A/F$ le nombre de côtés (ou d'arêtes) de chacune des faces polygonales régulières
- $g = 2A/S$ le nombre de faces contenant ω (indépendant de ce sommet)
- $q = (p - 2)g = 4(A(A - F))/FS$ le nombre d'arêtes incluses dans Ω et n'admettant pas ω comme sommet, c'est-à-dire encore le nombre de segments formant la frontière de Ω et celui des sommets de cette frontière ; le nombre de sommets n'appartenant pas à Ω est donc alors $S - q - 1$
- $\rho = A - q - g = A - (p - 1)g$ le nombre des arêtes non incluses dans Ω .

Reste alors à ajouter le gnomon $\Gamma(n) = (F - g) O_n^p - \rho n + (S - q - 1)$ au poids connu d'ordre $n - 1$. La justification est exactement analogue à celle déployée pour le cube : ajouter des faces, retirer des arêtes comptées deux fois, et enfin apporter une ultime correction en ajoutant les sommets dénombrés trois fois, ce qui donne une somme de la forme $F - R + A$ au lieu de $R - A$ pour les simples polygones.

	S	A	F	p	g	q	ρ	F_n	R_n	A_n
T	4	6	4	3	3	3	0	$n(n+1)/2$	0	0
O	6	12	8	3	4	4	4	$2n^2 + 2n$	$4n$	1
I	12	30	20	3	5	5	20	$15n(n+1)/2$	$20n$	6
C	8	12	6	4	3	6	3	$3n^2$	$3n$	1
D	20	30	12	5	3	9	18	$9n(3n-1)/2$	$18n$	10

	S	A	p	g	q	$\Gamma(n)$	$O(n)$
T	4	6	3	3	3	$n(n+1)/2$	$n(n+1)(n+2)/6$
O	6	12	3	4	4	$2n^2 - 2n + 1$	$n(2n^2 + 1)/3$
I	12	30	3	5	5	$(15n^2 - 25n + 12)/2$	$n(5n^2 - 5n + 2)/2$
C	8	12	4	3	6	$3n^2 - 3n + 1$	n^3
D	20	30	5	3	9	$(27n^2 - 45n + 20)/2$	$n(9n^2 - 9n + 2)/2$

Voici quelques égalités algébriques utiles, donnant les formes générales de ces cinq poids platoniciens et de leurs gnomons (en faisant jouer la relation d'Euler par exemple, on peut faire varier de façon très visible ces formules assez complexes)

$$\Gamma(n) = O(n) - O(n-1) = F(n) - R(n) + A(n) = (F - g) O_n^p - \rho n + (S - q - 1).$$

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (A - F - q/2) n^2 + (2F - 2A + 3q/2) n + (S - q - 1) \\ &= (S - 2 - q/2) n^2 + (4 - 2S + 3q/2) n + (S - q - 1). \end{aligned}$$

$$6O(n) = n \left((2n^2 - 3n + 1) S - (n^2 - 3n + 2) q - 4n^2 + 6n + 4 \right),$$

$$O(1) = 1, \quad \Gamma(2) = S - 1, \quad O(2) = S.$$

Dans son texte, Descartes exhibe les cinq tableaux contenant son algorithme pour les calculs des poids concernant les cinq polyèdres de Platon, dans l'ordre (T,O,I,C,D) de nos tableaux qui peut surprendre à première vue : mais notre interprétation est qu'il a d'abord mis en première ligne ceux qui ne sont composés que de triangles (par ordre croissant des nombres A , S ou F au choix), puis celui formé de carrés, le dodécaèdres aux faces pentagonales fermant la route car plus complexe que les quatre autres, la construction de pentagones réguliers étant un peu plus subtile que celle de carrés ou, *a fortiori*, de simples triangles⁹⁶.

Nombres polyédraux pyramidaux

Notons que les *nombres pyramidaux*, dont nous avons déjà parlé, forment une extension immédiate des poids numériques tétraédriques ; ils sont construits à partir d'une pyramide régulière dont la base est un polygone de p côtés. Le calcul de leur gnomon est particulièrement simple puisqu'il vaut exactement O_n^p . Leur nombre peut se noter \mathcal{P}_n^p et vaut

$$\mathcal{P}_n^p = (p-2) \frac{n^3 - n}{6} + \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)((p-2)n+5-p)}{6}$$

(d'où $\mathcal{P}_n^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ - résultat dont Nicomaque connaissait un algorithme de détermination récurrente -, $\mathcal{P}_n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$ etc).

Ainsi peut-on vérifier aussitôt que le poids octaédrique d'ordre n est évidemment la somme des poids pyramidaux à base carrée d'ordres n et $n-1$, puisque

$$O(n) = \frac{n(2n^2 + 1)}{3} = \frac{1}{3}(n(n+1)(2n+1) - (n-1)n(2n-1)) = \mathcal{P}_n^4 + \mathcal{P}_{n-1}^4.$$

Descartes ne fait pourtant pas allusion à cette famille infinie de nombres pyramidaux, car il s'est limité volontairement aux poids numériques des polyèdres platoniciens et archimédiens.

96. Il changera d'idée dans sa troisième partie, les classant alors dans l'ordre (T,O,C,I,D), à savoir par nombre croissant de sommets.

Nombres polyédraux archimédiens

Le processus est évidemment plus complexe que pour les nombres polyédraux platoniciens, car si le nombre g de faces ayant un même sommet ω est par exemple constant, et encore égal à $2A/S$, en revanche l'entier p peut prendre plusieurs valeurs (plus précisément deux ou trois). Nous sommes donc conduits à modifier quelque peu le tableau des définitions données pour les polyèdres de Platon ; voici ce qui change

- p devient un indice des deux ou trois nombres de côtés (ou d'arêtes) de chacune des faces polygonales régulières
- f_p est le nombre de p -faces contenant ω ; il vérifie les égalités $F = \sum_p f_p$,

$$A = \left(\sum_p p f_p \right) / 2 \text{ et } S = 2 + A - F = 2 + \sum_p (p - 2) f_p / 2$$

- $g_p = p f_p / S$ le nombre de p -faces contenant ω ; il vérifie les égalités $\sum_p g_p = g = 2A/S = \sum_p p f_p / S$

- $q = \sum_p (p - 2) g_p = \sum_p p (p - 2) f_p / S$ le nombre d'arêtes incluses dans Ω et n'admettant pas ω comme sommet, c'est-à-dire encore le nombre de segments formant la frontière de Ω et celui des sommets de cette frontière ; le nombre de sommets n'appartenant pas à Ω est donc toujours $S - q - 1$

- le reste pouvant être gardé sans changement, ou presque (par exemple pour la dernière égalité dans $\rho = A - q - g = A - \sum_p (p - 1) g_p$). Les résultats sont très analogues à ceux des polyèdres platoniciens, à cela près que dans le gnomon le nombre $(F - g) O_n^p$ est maintenant remplacé par une somme de deux ou trois termes, que Descartes symbolise par l'écriture $F + F$

$$\Gamma(n) = O(n) - O(n-1) = F(n) - R(n) + A(n) = \sum_p [(f_p - g_p) O_n^p] - \rho n + (S - q - 1).$$

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (A - F - q/2) n^2 + (2F - 2A + 3q/2) n + (S - q - 1) \\ &= (S - 2 - q/2) n^2 + (4 - 2S + 3q/2) n + (S - q - 1). \end{aligned}$$

$$6O(n) = n ((2n^2 - 3n + 1) S - (n^2 - 3n + 2) q - 4n^2 + 6n + 4).$$

On en déduit aussitôt un tableau donnant ces poids numériques $O(n)$ et leurs gnomons $\Gamma(n)$ - ainsi que les paramètres permettant de les calculer - pour les treize polyèdres archimédiens en suivant, naturellement là où c'est possible, l'ordre de Descartes (la première colonne indique leur nom donné par la classification de Torquato).

Il n'y a aucun problème pour les sept premiers, puisque les poids numériques les concernant figurent explicitement dans le Traité ; les deux poids suivants ne figurent par contre pas dans la troisième partie, même si la publication « officielle » d'Adam-Tannery les insère silencieusement, comme le fera plus tard Federico (mais pas Costabel) ; les deux suivants correspondent à des corps simplement signalés en note, et les deux derniers - les *camards* - étant totalement absents du texte.

A_i	S	g	q	ρ	$\Gamma(n)$	$O(n)$
1	12	3	9	6	$(11n^2 - 13n + 4)/2$	$n(11n^2 - 3n - 2)/6$
11	12	4	6	14	$7n^2 - 11n + 5$	$n(7n^2 - 6n + 2)/3$
13	24	3	10	23	$17n^2 - 29n + 13$	$n(17n^2 - 18n + 4)/3$
12	24	3	13	20	$(31n^2 - 49n + 20)/2$	$n(31n^2 - 27n + 2)/6$
9	24	4	7	37	$(37n^2 - 67n + 32)/2$	$n(37n^2 - 45n + 14)/6$
2	60	3	11	76	$(105n^2 - 199n + 96)/2$	$n(35n^2 - 47n + 14)/2$
8	30	4	8	48	$24n^2 - 44n + 21$	$n(8n^2 - 10n + 3)$
10	60	3	17	70	$(99n^2 - 181n + 84)/2$	$n(33n^2 - 41n + 10)/2$
5	60	4	8	108	$54n^2 - 104n + 51$	$n(18n^2 - 25n + 8)$
7	48	3	12	57	$40n^2 - 74n + 35$	$n(40n^2 - 51n + 14)/3$
6	120	3	14	163	$111n^2 - 215n + 105$	$n(37n^2 - 52n + 16)$
3	24	5	6	49	$19n^2 - 35n + 17$	$n(19n^2 - 24n + 8)/3$
4	60	5	7	138	$(109n^2 - 211n + 104)/2$	$n(109n^2 - 153n + 50)/6$

L'ordre ici choisi par Descartes pour les neuf premières lignes est celui du nombre de faces croissant d'une ligne à l'autre⁹⁷. Celui des arêtes n'apparaît pas ici (faute de place) mais on le restitue aussitôt en ajoutant entr'elles trois colonnes puisque $A = g + q + \rho$.

Les poids numériques des prismes réguliers

La méthode précédente s'applique sans difficulté aux deux séries infinies de polyèdres archimédiens prismatiques (droit et tordus). Nous donnerons ici les résultats sans preuve

- Pour les p -prismes : $S = 2p$, $g = 3$, $q = p + 2$ et $\rho = 2p - 5$ d'où

$$\Gamma(n) = (3(p-2)n^2 + (14-5p)n + 2(p-3))/2,$$

$$O(n) = n^2((p-2)n + 4 - p)/2.$$

- Pour les p -antiprismes : $S = 2p$, $g = 4$, $q = p + 1$ et $\rho = 3p - 5$ d'où

$$\Gamma(n) = ((3p-5)n^2 + (11-5p)n + 2(p-2))/2,$$

$$O(n) = n((3p-5)n^2 - 3(p-3)n + 2)/6.$$

Un exemple de tableau archimédien

Comme pour les polygones et les polyèdres platoniciens, Descartes donne sept tableaux du type $F + F - R + A \quad O$, dans un désordre sur le manuscrit sans doute dû à la hâte du scripteur. Plutôt que d'en reproduire un dans l'état où Leibniz nous l'a légué, nous avons préféré en présenter l'un de ceux qui manquent, en l'occurrence celui qui permet de calculer le poids numérique du *Cuboctaèdre tronqué* A_7 ($S = 48$, $A = 72$, $F = 26$, $f_4 = 12$ faces carrées par sommet, $f_6 = 8$, $f_8 = 6$, $g = 3$ faces et arêtes par sommet, $g_4 = g_6 = g_8 = 1$, $q = 12$, $\rho = 57$ pour lequel $\Gamma(n) = 40n^2 - 74n + 35$ et $O(n) = n(40n^2 - 51n + 14)/3$).

Chacune des lignes s'écrit donc sous la forme $11O_n^4 + 7O_n^6 + 5O_n^8 - 57n + 35$, ce qui donne finalement

97. À la différence du tableau analogue pour les platoniciens, où c'est par nombre de sommets croissant que ces cinq corps sont classés.

n	F	$+F$	$+F$	$-R$	$+A$	$\Gamma(n)$	$O(n)$
1	11	+7	+5	-57	+35	= 1	1
2	44	+42	+40	-114	+35	= 47	48
3	99	+105	+105	-171	+35	= 173	221
4	176	+196	+200	-228	+35	= 379	600
5	275	+315	+325	-285	+35	= 665	1265

Comme pour les tableaux précédents, chaque poids $O(n)$ s'obtient en ajoutant à $O(n - 1)$, situé juste au dessus de lui, le gnomon $\Gamma(n)$, c'est-à-dire la somme $F(n) - R(n) + A(n)$ (encore évoquée par le symbole $F + F + F - R + A$), situé à sa gauche, et dans ce texte-ci explicitement calculé dans l'avant-dernière colonne (qui ne figure pas dans les exemples de Descartes). Mais la fin de la deuxième partie va nous dévoiler une autre façon, récurrente également, de calculer les poids polyèdriques.

Un autre algorithme cartésien de calcul des poids sans gnomon

Juste avant de dresser la table constituant la troisième partie, Descartes tient à résumer une autre technique de calcul des poids numériques des polyèdres archimédiens⁹⁸, équivalente à celle qu'indiquent, de façon très elliptique, les tableaux $F - R + A$. En fait, il l'applique à l'icosidodécaèdre (A_8 , 20 triangles et 12 pentagones, le dernier de sa liste pour lequel il a effectivement écrit le poids $8n^3 - 10n^2 + 3n$), laissant la généralisation - facile - au lecteur.

Il diffère de ce que l'on peut apprendre du déchiffrage des tableaux de sommation des gnomons⁹⁹ car il repose sur une sommation algébrique fort astucieuse qui n'apparaît qu'ici, qui apporte une simplification par rapport aux $F - R + A$ qui ne permettent vraiment effectivement que des calculs pour de petites valeurs de n , alors qu'on a en main ce qui suffit pour obtenir une formulation tout à fait générale¹⁰⁰.

98. Donc valable pour les platoniciens où cela se simplifie, la valeur de p étant unique.

99. Sept en tout ! Descartes savait que ses lecteurs auraient quelque mal.

100. Voir par exemple la page 52 du livre de Costabel, ainsi que nos pages 57 et 59.

Voici donc cet algorithme ; on part du fait que, pour p fixé

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^n O_m^p &= \sum_{m=1}^n \left(\frac{p-2}{2} m^2 + \frac{4-p}{2} m \right) \\ &= \frac{p-2}{12} n(n+1)(2n+1) + \frac{4-p}{4} n(n+1) = \frac{n+1}{3} \left(O_n^p + \frac{n}{2} \right).\end{aligned}$$

Par suite, posant $\hat{f}_p = f_p - g_p$, $g = \sum_p g_p$, $q = \sum_p p g_p - 2g$, $\rho = A - q - g$ (où A est le nombre d'arêtes) et $A_D = S - q - 1$ (où A_D est écrit ici pour noter le symbole de Descartes utilisé dans ses tableaux), il vient

$$\begin{aligned}O(n) &= \sum_{m=1}^n (\Sigma F - R + A) = \sum_{m=1}^n \left(\left(\sum_p \hat{f}_p O_p^p \right) - m\rho + A_D \right) \\ &= \frac{n+1}{3} \left[\sum_p \hat{f}_p \left(O_n^p + \frac{n}{2} \right) \right] - \frac{n(n+1)}{2} \rho + nA_D.\end{aligned}$$

De manière plus explicite

a) pour chaque p calculer O_n^p

b) calculer $O_n^p + \frac{n}{2}$

c) calculer $\left(O_n^p + \frac{n}{2} \right) \frac{n+1}{3}$

d) calculer $\left(O_n^p + \frac{n}{2} \right) \frac{n+1}{3} \hat{f}_p$

e) calculer $\Sigma_p = \sum_p \left[\left(O_n^p + \frac{n}{2} \right) \frac{n+1}{3} \hat{f}_p \right]$

f) calculer $\Sigma_p - \frac{n(n+1)}{2} \rho$

g) et terminer par le calcul de $\Sigma_p - \frac{n(n+1)}{2} \rho + nA_D$.

Dans son exemple numérique, $(S, A, F) = (30, 60, 32)$, $f_3 = 20$, $g_3 = 2$, $\widehat{f}_3 = 18$, $f_5 = 12$, $g_5 = 2$, $\widehat{f}_5 = 10$, $g = 4$, $q = 8$, $\rho = 60 - 8 - 4 = 48$, $A_D = 30 - 8 - 1 = 21$: les nombres 30, 60, 20, 12, 18, 10, 48 et 21 sont d'ailleurs, très succinctement, présentés dans le commentaire de l'un des sept tableaux $(\Sigma F, R, A_D)$ cartésiens, qui aurait du être le dernier¹⁰¹ mais est en fait le premier par suite d'une maladresse de Leibniz. Ce dernier et le paragraphe final de la deuxième partie du Traité¹⁰² peuvent donc maintenant être parfaitement décryptés par tous sans effort spécial.

Par exemple, la dernière ligne de ce tableau doit être lue sous la forme suivante avec $n = 3$

$$(108 + 120) - 144 + 21 = (6 \cdot 18 + 12 \cdot 10) - 3 \cdot 48 + 21 = (O_n^3 \widehat{f}_3 + O_n^5 \widehat{f}_5) - n \rho + A_D$$

et le reste est à l'avenant.

La deuxième partie du texte cartésien

Comme ci-dessus, nous allons commencer par suivre dans cette section le texte figurant en annexe, disséqué par paragraphe.

1. Cette brutale et extrêmement concise introduction à la formation de différents polyèdres s'ouvre sur une allusion à la technique du « gnomon ». Le mot « solide » montre qu'il s'agit de construire des polyèdres, mais les deux premiers paragraphes traitent en fait de polygones, leurs analogues en géométrie plane.
2. Elle commence donc par un rappel des classiques *nombres polygonaux*. La définition la plus simple du nombre polygonal d'indice n associé à une « raison » donnée d est purement numérique : c'est la somme des n premiers termes de la suite en progression arithmétique de raison d partant de 1. Pour $d = 1$, on trouve ainsi l'entier $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, pour $d = 2$, on trouve l'entier $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$ et, pour $d = 3$, l'entier

101. De fait, le commentaire est bien à sa place théorique.

102. *Ut si quærantur termini...* : soit par exemple à chercher les expressions...

$\frac{3n^2 - n}{2}$. Ces trois exemples sont respectivement connus sous les noms de *nombres triangulaires*, *nombres carrés* et *nombres pentagonaux*. Pour des raisons qui apparaîtront ci-dessous, le nombre polygonal d'indice n associé à la raison d est noté ici O_n^{d+2} . Un qualificatif tel que « pentagonal »¹⁰³ vient de ce que chacune de ces listes peut être visuellement associée à une famille de polygones réguliers à $p = 5$ côtés où $p = d+2$, ayant un sommet ω en commun et deux à deux liés par des homothéties de centre ω .

Descartes écrit dans ce second paragraphe, dans deux cas particuliers (celui des tétragonaux puis des pentagonaux, la définition des triangulaires étant supposée bien connue) ce que nous pouvons aujourd'hui écrire sous la forme $O_n^p = (p-2) \frac{n(n+1)}{2} - (p-3)n$ (dans le dernier de ses exemples, le manuscrit est fautif car il y est écrit -2 au lieu de $-2n$).

Plutôt que de donner tout de suite une définition lourde et abstraite de l'intervention traditionnelle de ces figures dans une question *a priori* purement arithmétique, il nous a suffi ci-dessus de faire examiner une image concrète d'un exemple du cas $p = 5$: le nombre de points du pentagone le plus grand est $O_5^5 = 35$. Le *gnomon* n'est alors autre que le nombre de points de la bande qu'il faut coller au premier pentagone pour obtenir le second, c'est-à-dire $O_5^5 - O_4^5 = 13$. L'« angle vide », qui s'est ainsi peu à peu rempli, n'est autre que celui que forme les deux côtés ayant pour origine le sommet commun à tous les polygones.

Si l'on imagine la figure analogue pour $p = 3$, on y retrouve sans peine que $O_n^3 = \frac{n(n+1)}{2}$. On trouve d'ailleurs trois exemplaires de ponctuations associées au quatrième nombre triangulaire, clairement mis en évidence par les deux lignes en pointillés découpant le pentagone de notre illustration, ce que Descartes exprime par la phrase « la figure entière peut être résolue en triangles ». Un rapide décompte montre alors que $O_4^3 = 10$ et $O_5^3 = 15$. Si le polygone est un triangle ou un parallélogramme (par exemple un carré), on voit que les sommets de ses différentes ponctuations jouent des rôles parfaitement symétriques. Par contre, il n'en est pas de même pour un quadrilatère quelconque, et notre figure montre par ailleurs que, pour $p = 5$, le sommet constituant le premier gnomon joue un rôle très

103. Voir page 50.

particulier ; cela engendrera des difficultés pour le passage des nombres polygonaux aux polyédraux.

Voici, pour être complet, une définition précise d'une ponctuation p -polygonale résultant de n gnomons successifs :

- Pour $n = 2$, c'est l'ensemble des sommets d'un polygone P à p côtés ; pour $n = 1$, c'est ω , l'un des sommets de P choisi arbitrairement.
- Pour $n > 2$, la figure est construite à partir de la réunion des images de P par les homothéties de centre ω et de rapports $0 \leq k < n$ de la façon suivante : sur une arête résultant de l'homothétie de rapport k , seuls sont retenus les n points, extrémités comprises, qui la graduent de manière uniforme.

Il est clair qu'une telle définition engendre une infinité de figures distinctes, selon les choix du polygone P et de ω . Cela dit, si les ponctuations ainsi obtenues sont bien distinctes, elles comportent exactement le même nombre O_n^p de points, notamment invariant par les transformations du groupe affine du plan. Cela justifie *a posteriori* l'unicité de cet entier, qui ne dépend donc que de p et de n .

3. Une définition analogue des nombres polyédraux cartésiens, qui généralisent les polygonaux, ne peut être qu'être nettement plus lourde si ses faces ne sont pas formées uniquement de triangles et de parallélogrammes, car la ponctuation de chacune des faces du gnomon exige alors des choix arbitraires parmi leurs sommets. Il en résulte que, par exemple, une ponctuation d'un dodécaèdre régulier n'est pas unique puisqu'il contient douze faces pentagonales dont neuf ne contenant pas un sommet donné, pour lesquelles il y a donc quarante-cinq choix arbitraires à effectuer.

Cela nous indique que l'introduction de ces nombres était pour Descartes, peut-être finalement plus une curiosité d'algébriste que d'un géomètre soucieux de définitions précises, lequel n'aurait sans doute pas pu se contenter de l'expression trop laconique « les cinq corps réguliers [...] se forment par addition d'un gnomon », celui-ci pouvant prendre différentes formes non isométriques, bien qu'ayant heureusement exactement les mêmes nombres

de points quels qu'aient été les différents choix arbitraires de sommets pour chacune de ses faces.

Descartes indique dans ce troisième et très court paragraphe qu'il va commencer la fin de son Traité par le cas (effectivement plus simple) des poids des polyèdres de Platon.

4. La première série de tables suivant ce paragraphe donne pour chacun de ces polyèdres réguliers les valeurs des premiers gnomons sous la forme d'une formule ramassée $F - R + A$, lâchée sans explications, ainsi que les « poids » O correspondants : des modernes auraient écrit $F_n - R_n + A_n$ et O_n où n vaut successivement 1, 2, 3, 4... La suivante donne aussi des valeurs de gnomons, cette fois-ci associés aux polygones, à l'aide d'une formule, nécessairement un peu plus simple, écrite $R - A$. Il est très étonnant que ce cas facile soit traité après celui des solides, mais une observation minutieuse du manuscrit laisse croire que Leibniz avait, dans un premier temps, négligé de recopier la seconde série de tables, trop triviales, puis changé d'avis en les casant plus ou moins sous les premières, dans une partie encore libre de la feuille.

Ces tables semblent complexes, mais peuvent être obtenues très facilement une fois connus les mécanismes qui les sous-tendent tels que nous les avons disséqués plus haut. Signalons qu'il n'y aucune raison de les limiter à quatre lignes (et à douze colonnes pour les polygones), sauf qu'il faut bien s'arrêter quelque part... Descartes s'est donc limité aux cas $1 \leq n \leq 4$ (et $3 \leq p \leq 6$ pour les polygones).

Notons enfin que Leibniz avait écrit par erreur $1 - 8 + 1$ dans la table correspondant à l'octaèdre, ici corrigé en $12 - 8 + 1$ puisque $O_2^3 = 3$, et que Pierre Costabel avait écrit, lui aussi par erreur, $150 - 80 + 6, 24$ dans la table de l'icosaèdre, ici corrigé en $150 - 80 + 6, 124$, puisque $48 + (150 - 80 + 6)$ égale 124 et non 24.

5. Ce cinquième paragraphe donne les tableaux associés aux polygones. La table pour le polygone à p côtés peut se décrypter ainsi. Il se décompose en quatre sous-tables, respectivement consacrées aux triangles, quadrilatères, pentagones et hexagones. La dernière colonne de chacun d'eux donne, pour $1 \leq n \leq 4$, les valeurs des poids O_n^p , abrégés en O_n , c'est-à-dire

des nombres de points dans les ponctuations analogues à celle de notre figure. On peut ainsi y lire, par exemple, en neuvième colonne et dernière ligne, $O_4 = 22 = O_4^5$ (il s'agit en effet du pentagone), alors que la sixième colonne contient les carrés des entiers de 1 à 4 (c'est-à-dire les O_n^4).

Dans chaque sous-table, les A_n sont constants et respectivement égaux à 0 (pour le triangle), 1 (pour le quadrilatère), 2 (pour le pentagone) et 3 (pour l'hexagone), donc aux nombres $p - 3$. Par ailleurs les R_n sont les produits $(p - 2)n$, ce qui correspond naturellement au gnomon

$$(p - 2)n - (p - 3) = O_n^p - O_{n-1}^p.$$

Enfin les O_n sont les sommes des $R_m - A_m$ pour $1 \leq m \leq n$. Par exemple, pour le pentagone, $O_4 = (3 - 2) + (6 - 2) + (9 - 2) + (12 - 2) = 22$.

Le lecteur pourra vérifier sur la figure de la page 50 que $O_5^5 - O_4^5 = 35 - 22$ est bien égal à $(5 - 2).5 - (5 - 3)$. La démonstration générale de la mesure du gnomon du pentagone, et plus généralement de tout polygone découlera facilement de la définition d'un gnomon.

6. Le mot « mesure » signifie, selon le cas, longueur (sur la droite), aire (dans le plan) ou volume (dans l'espace). L'intervention de signes cossiques dans les lignes suivantes, traduits ici en symboles modernes, signifie simplement que les longueurs sont mesurées par des unités, alors que les aires sont comme des carrés et les volumes comme des cubes : cet usage des dimensions des figures usuelles est traditionnel.

Les deux verbes latins quiouvrent ce sixième paragraphe (*si imaginaremur [...] intelligerentur*), à savoir *si nous nous représentions* [par l'imagination...] elles seraient à comprendre [par l'entendement], ont pour mode l'irréel du présent, ce qui manifeste bien le type de difficulté que Descartes affronte ici. Dans les termes *has progressiones nostræ matheseos* (ces progressions dans notre mathématique), on relève l'occurrence du terme *mathesis*, à une époque et dans une phrase où Descartes se sert encore de signes cossiques pour désigner une discipline qui dépasse en généralité la mathématique ordinaire (astreinte aux bornes de l'imagination) et donner toute son ampleur à l'entendement du mathématicien. Le fait de savoir que le mot « *mathesis* » possède plusieurs acceptations, très

important dans toute étude cartésienne, devrait nous pousser à essayer de l'interpréter dans cet essai de jeunesse, mais il est clair que cette apparition unique dans le Traité ne permettrait que des hypothèses hautement problématiques. D'où notre traduction des plus prudentes...

7. Pour la simplicité (!) du commentaire de l'étude de sept poids polyédriques archimédiens, nous cessons provisoirement de le découper en fonction mécanique des paragraphes du texte.

La première table, isolée, de trois lignes de nombres (comme le paragraphe qui le suit) est donc évidemment mal placée. Elle devrait être située en face du texte consacré au corps « constitué » de 20 triangles et 12 pentagones - le dernier de la liste, à savoir l'*icosidodécaèdre A8* -, mais nous avons cru devoir respecter ici l'ordre du manuscrit. Le texte qui la suit correspond au *tétraèdre tronqué A1*.

Le texte tel qu'il nous est parvenu pose ici quelques problèmes de cohérence, qu'il n'est pas très difficile de démêler même si c'est assez pénible à exposer rationnellement. Il contient des tables analogues aux précédentes, concernant cette fois-ci les gnomons et les poids de sept des polyèdres archimédiens (sur treize), dans l'ordre exact où ils seront recensés systématiquement dans la première colonne de la troisième partie : nous les avons numérotés selon les choix de Torquato. Chacune de ces tables est associée à un texte introductif (placé à sa droite en principe), définissant les caractéristiques essentielles du polyèdre, où *côtés* et *angles* signifient arêtes (dans le sens de côtés des polygones faces) et sommets.

Le désordre de la copie leibnizienne fait que ce que nous lisons ci-dessus est assez brouillé par rapport à ce que voudrait la logique. Voici donc une reconstitution de ce qu'était le manuscrit cartésien (ou de ce qu'il serait devenu si son auteur l'avait jugé prêt pour publication).

Oublions donc un instant la première table (de 18 à 135), et le texte suivant, qui forment chacun un paragraphe. Ce qui suit semble un peu plus ordonné, mais comporte encore deux incohérences. En effet, seules les troisième, quatrième, cinquième et sixième tables sont correctement placées en face des textes qui leur correspondent, concernant les polyèdres *A11*, *A13*, *A12* et *A9*. Le dernier couple est formé de la table du polyèdre

A2 face au texte du polyèdre *A8*. Le premier couple table-texte côte-à-côte est incohérent, car en fait la table est celle de *A1* et le texte celui de *A11* avec des erreurs, que l'on retrouve d'ailleurs - bien corrigé - dès la suivante des sept études de poids de polyèdres archimédiens.

Manquent donc *a priori* la table de *A8* et le texte de *A2*. Ce dernier texte est effectivement absent du manuscrit (mais facile à reconstituer) ; de son côté, la table de *A8* n'est autre que la toute première, formée de trois lignes isolées ; le texte qui suit cette dernière est celui de *A1*. Le premier accouplement au-dessous doit être lu comme étant constitué de la table de *A1* et d'une mauvaise copie du texte de *A11*, d'ailleurs barrée par Leibniz, qui s'était aperçu des confusions qu'il venait de commettre !

Il faut encore noter deux erreurs dans la « bonne » table du *cuboactaèdre A11*, où il faut lire 24 côtés et 12 angles, et non 36 et 24 comme avait écrit le copiste dans sa précipitation¹⁰⁴ (lapsus rétabli par Costabel, Federico et nous-mêmes). Par ailleurs, la valeur R_4 de la table relative à *A9* était notée fautivement 184 chez Leibniz, Federico et Costabel ; la bonne valeur est 148 (Leibniz lui-même avait pourtant averti à la ligne suivante que « les caractères de la marge de gauche de la ligne du manuscrit étaient effacés et douteux ; plus les nombres de ce gnomon ne conviennent pas, comme plus haut »).

Notons que Costabel, comme Adam-Tannery, écrivent $15|2 + 170$ au lieu de $13|2 + 270$ dans la dernière des sept tables ; cette erreur ne figure ni chez Leibniz ni chez Federico.

Notre traduction a naturellement été corrigée dans ce sens, même si, en revanche, nous avons tenu à respecter les bizarreries de la mise en page longuement analysées ci-dessus, afin de ne pas porter atteinte à la structure même du manuscrit.

Terminons cette revue de pages difficiles en signalant la présence, dans la marge de gauche entre les deux derniers blocs table-texte, de la matrice

104. Ce qui correspond en fait au corps suivant, le *cube tronqué A12*.

suivante

1	1
11	10
32	21
64	32
107	43
161	54

avec des signes divers comme , – ou > séparant les deux colonnes. Sa signification semble *a priori* bien obscure. Voici pourtant ce que signifie, très probablement, cette suite de douze nombres, précédée de la phrase « *Horum autem differentias ita defiemus, prioris* »¹⁰⁵. En fait elle est associée au tableau concernant le tétraèdre tronqué A1 situé nettement plus haut. Les six premières valeurs de $O(n) = n(11n^2 - 3n - 2)/6$ sont 1, 12, 44, 108, 205 et 376. Les six premières valeurs des différences $\Gamma(n) = (11n^2 - 13n + 4)/2$ sont donc 1, 11, 32, 64, 107 et 161 : nous reconnaissions naturellement ici notre première colonne. À l'exception du premier terme de la seconde colonne, peut-être douteux, les autres valent naturellement $\Gamma(n) - \Gamma(n-1) = 11n - 12$ (soit une progression - cf. *progressiones* - arithmétique de raison 11). La lecture de cette dernière colonne comme une telle progression serait donc plus claire si son premier nombre était un 0, mais cela n'est pas. Faute de copie, encore une fois ? Sans doute d'ailleurs cet ajout marginal n'est-il pas de Descartes, car il ressemble à un graffiti de Leibniz essayant à la hâte de comprendre la technique $F - R + A$ en testant les différences premières puis secondes du polynôme $O(n)$. Pour sa part, le vice-amiral de Jonquières interprète la première ligne de notre matrice comme étant tout simplement le nombre 11, raison de la progression arithmétique constituant la seconde colonne : c'est astucieux, mais incompatible avec une lecture loupe en main d'une bonne reproduction du manuscrit sur lequel on distingue nettement « 1, 1 ». Rien n'est simple dans cette affaire, que Costabel signale brièvement mais ne traduit ni ne commente.

8. L'avant-dernier et le dernier paragraphes sont consacrés à l'algorithme sans gnomon décrit page 62. La lecture du texte est claire et ne semble pas

105. « D'iceux-ci maintenant les différences sont ainsi définies, d'abord », traduit par de Jonquières en 1890 par « Les différences <premières, secondes> et <troisièmes (celles-ci constantes)> des nombres O sont, par suite des définitions précédentes, <celles qui sont écrites à la droite du tableau> » et par Federico comme signifiant « Of these now the differences are thus defined, first ».

demander de commentaires qui viendraient à se surajouter à ce que nous avons déjà écrit sur le sujet. L'exemple donné est celui de l'*icosidodécaèdre A8* ($f_3 = 20$ triangles, $f_5 = 12$ pentagones), pour lequel $S = 30$, $A = 60$, $F = 32$, $g = 4$, $q = 8$, $\rho = 48$ et $O(n) = n(8n^2 - 10n + 3)/3$. Les mots *racines* et *angles*, d'initiales R et A dans la somme $F + F - R + A$, se diraient aujourd'hui arêtes et sommets ; enfin le *nombre algébrique cherché* est le *poids numérique polyèdrique* de A8.

Le tableau final du texte cartésien

Les calculs de diamètres et volumes

Justifier chacun des résultats numérico-algébriques que Descartes a compilés dans sa grande Table serait intéressant, mais dévoreur d'espace. On peut heureusement se reporter pour cela au grand et minutieux travail de Pierre Costabel (pages 71-84), ou plus prosaïquement lui faire confiance¹⁰⁶.

Cela dit, il est apparu comme intéressant de montrer, sur le cas particulier du cuboctaèdre tronqué A7 (voir page 38), ou encore grand rhombicuboctaèdre, comment calculer grâce aux coordonnées cartésiennes de l'espace le volume v et le diamètre δ de ce polyèdre, presque absent de la liste de Descartes, dont les arêtes sont supposées être de longueur 1.

Le schéma ci-dessous montre notre choix de repère (orthonormé bien entendu) : une base octogonale régulière (A, B, \dots) est supposée placée sur le plan d'équation $z = 0$, son centre O étant pris comme origine des axes. Celui des abscisses et celui des ordonnées sont tels que les points A et B aient pour coordonnées respectives

$$A\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

106. Normalien (Ulm) de la promotion 1932, Pierre Costabel fut agrégé de mathématiques trois ans plus tard, comme il se doit.

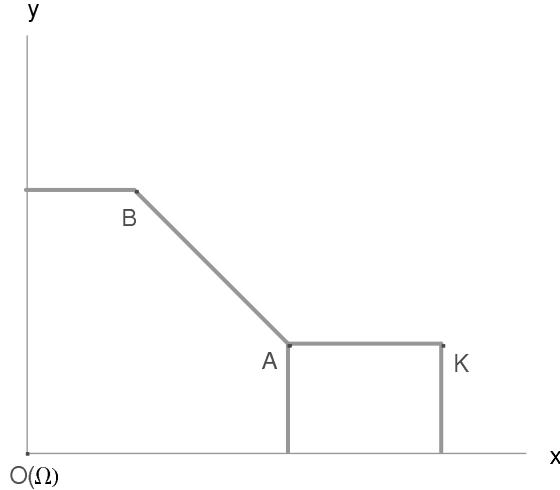


FIGURE 1.32 – La figure servant de base au calcul

Au sommet A , l'octogone rencontre un carré (A, K, \dots) qui partage l'arête AK avec un hexagone régulier (K, A, B, \dots) . Les vecteurs unitaires \vec{AB} et \vec{AK} ont pour coordonnées respectives $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ et $(\lambda, 0, \mu)$; leur angle ayant pour cosinus $-1/2$, on en déduit $\lambda = 1/\sqrt{2}$, $\mu = 1/\sqrt{2}$ par exemple et les coordonnées de K

$$\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Soit Ω , de coordonnées $(0, 0, h)$, le centre du polyèdre, situé comme K dans le demi-espace défini par $z > 0$. Les égalités $\Omega A = \Omega K = \delta/2$ donnent

$$h = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}, \quad \delta^2 = 4\Omega A^2 = 4h^2 + 4 + 2\sqrt{2} = 13 + 6\sqrt{2}.$$

Le calcul du volume $v = 22 + 14\sqrt{2}$ est plus complexe. Nous utiliserons une formule générale correspondant à la décomposition du polyèdre en pyramides de sommets Ω et de bases les p -faces du solide, en notant h_p les hauteurs séparant ces bases d'aires \mathcal{A}_p de leurs centres, à savoir

$$v = \frac{1}{3} \sum_p f_p h_p \mathcal{A}_p = \frac{1}{12} \sum_p p f_p h_p \cot \frac{2}{p}$$

où les angles sont mesurés par un droit comme d'habitude dans ce chapitre. Les hauteurs h_p sont simplement calculées par analogie avec l'égalité évidente $h^2 = \Omega A^2 - OA^2$.

Sans entrer dans les détails faciles, on obtient finalement

$$h_4 = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}, \quad h_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \sqrt{2}), \quad h_8 = h,$$

$$12v = 12(6+2\sqrt{2}) + 8.3\sqrt{3}(1+\sqrt{2})\sqrt{3} + (8+4\sqrt{2})6(1+\sqrt{2}) = 12(22+14\sqrt{2}).$$

La méthode est générale pour les onze polyèdres archimédiens ayant un centre de symétrie, c'est-à-dire ceux dont Descartes fait mention.

Les quatre polyèdres absents du tableau

En complément - non indispensable - nous mettons ici, sans preuves spéciales, le volume v et le diamètre δ des $A7$ (cuboctaèdre tronqué, $f_4 = 12$, $f_6 = 8$ et $f_8 = 6$) et $A6$ (icosidodécaèdre tronqué, $f_4 = 30$, $f_6 = 20$ et $f_{10} = 12$), juste signalés en dernière ligne du récapitulatif cartésien¹⁰⁷.

- $A7 : v = 22 + 14\sqrt{2}$, $\delta = \sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$.
- $A6 : v = 95 + 50\sqrt{5}$, $\delta = \sqrt{31 + 12\sqrt{5}}$.

Restent les *snubs* ou *camards* pour lesquels $g = 5$, $A3$ (cube aplati, $f_3 = 32$ et $f_4 = 6$) et $A4$ (dodécaèdre aplati, $f_3 = 80$ et $f_5 = 12$) : pour eux, les calculs sont beaucoup plus complexes ; dans le premier cas intervient *nombre de Tribonacci*, la racine réelle t de l'équation $t^3 = t^2 + t + 1$ du troisième degré, alors qu'il faut monter au douzième degré pour l'autre¹⁰⁸ ! Leurs volumes valent approximativement 7,89 et 37,62, alors que leurs diamètres valent approximativement 2,68 et 2,16. On comprendra que nous n'allions pas plus loin dans cette compilation déjà trop lourde.

107. Pour ce qui concerne $A7$, nous avions calculé, juste un peu plus haut (page 72), les valeurs de v et de δ à titre d'exemple pour le cas général.

108. À savoir considérer la huitième racine de l'équation $2.176.782.336x^{12} - 3.195.335.070.720x^{10} + 162.223.191.936.000x^8 + 1.030.526.618.040.000x^6 + 6.152.923.794.150.000x^4 - 182.124.351.55.575.000x^2 + 187.445.810.737.515.625$ (d'après le site de *Wolfram MathWorld*).

Le cas des p -prismes et antiprismes

Bien que nous sortions ici encore légèrement du sujet (puisque Descartes ne les mentionne pas du tout) nous donnerons ici hauteur h , volume v et diamètre δ des p -prismes, puis p -antiprismes, tous supposés d'arêtes de longueur $d = 1$, sans démonstrations particulières¹⁰⁹

- p -prismes : $h = 1$, $v = \frac{p}{4} \cot \frac{\pi}{p}$, $\delta = \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{p}}}$.
- p -antiprismes : $h = \frac{1}{2} \sqrt{3 - \tan^2 \frac{\pi}{2p}}$, $v = \frac{p h^3}{6} \cot \frac{\pi}{2p}$, $\delta = \sqrt{h^2 + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{p}}}$.

Terminons cette excursion dans le monde numérique des volumes des polyèdres archimédiens pour montrer qu'il n'est pas si simple qu'il n'y paraît : le grand Harold Scott MacDonald Coxeter n'écrivit-il pas, dans sa recension du livre de Federico dans les *Mathetical Reviews*, que des racines cubiques suffiraient pour calculer les mesures de A_4 , ce qui est faux ? Signalons aussi que l'article cité de Torquato mélange les valeurs numériques de A_5 et A_6 , ainsi que celles de A_7 et A_9 , c'est-à-dire intervertit les « grands » rhombis et les « petits » !

La troisième partie du texte cartésien

La table qui constitue l'intégralité de la troisième partie commence par une ligne faisant référence au calcul des poids à partir de *progressions arithmétiques* (voir page 70). Elle peut s'examiner selon deux directions. Il s'agit en quelque sorte d'une grande matrice à seize lignes et cinq colonnes.

Commençons par examiner le rôle de chacune de ces dernières.

109. Indiquons cependant que, pour le calcul du volume, l'application de la *formule des trois niveaux* simplifie bien le travail.

1. Ces cinq colonnes peuvent se lire en lignes (seize au total). Plus précisément

- La première colonne donne les caractéristiques des quatorze polyèdres réguliers et semi-réguliers examinés, soit leur nom pour les cinq premiers (platoniciens), ou leurs nombres f_p de faces régulières de différents types (deux ou trois, pour les neuf archimédiens sur treize possibles).
- La seconde, la plus importante, donne les poids numériques $O(n)$ écrits avec des symboles cossiques, naturellement traduits ici en notations modernes (exception : les deux derniers sont sans poids).
- La troisième donne le volume du polyèdre exprimé en fonction de u , longueur commune à toutes les arêtes, systématiquement portée au cube (notation moderne, remplaçant un symbole cossique)¹¹⁰.
- La quatrième donne, toujours en fonction de u , le diamètre de la sphère circonscrite.
- La cinquième explique, s'il y a lieu, par quelle troncature le polyèdre peut être défini, en donnant la longueur de l'arête du polyèdre à tronquer en fonction de u (par exemple on trouve un tétraèdre régulier de côté 1 en tronquant convenablement un cube de côté $1/\sqrt{2}$). Il peut d'ailleurs y avoir plusieurs troncatures possibles. On en rencontre souvent deux ; nous verrons que parfois on aurait pu augmenter ce nombre.

2. Ces colonnes sont en fait constituées chacune de quatorze éléments lus ligne à ligne (la première et la seizième d'entre elles étant particulières).

- La première ligne porte des noms pour les troisième et quatrième colonne, à savoir *pondera geometrica (volumes)* et *axes majores*

¹¹⁰. Dans sa traduction, Federico, pages 110-1, utilise la même lettre pour n et u , ce qui est fâcheux ; pour sa part, Costabel garde les signes cossiques.

(diamètre des sphères circonscrites) de chaque polyèdre considéré, calculés en fonction de la longueur d commune à toutes les arêtes.

Les cinq lignes suivantes concernent les polyèdres réguliers. Avant le nom, figure le type des faces (t pour triangle, c pour carré et p pour pentagone). Après le nom figure le triplet classique (S, A, F) et, s'il y a lieu, mention d'une origine par troncature. Le texte de Descartes est bien entendu moins riche, mais nous pensons permettre ainsi une consultation plus facile.

- $4t$, Tétraèdre, $(4, 6, 4)$, par troncature d'un cube.
- $8t$, Octaèdre, $(6, 12, 8)$, par troncature d'un tétraèdre.
- $6c$, Cube, $(8, 12, 6)$.
- $20t$, Icosaèdre, $(12, 30, 20)$.
- $12p$, Dodécaèdre, $(20, 30, 12)$.

Les neuf lignes suivantes concernent neuf polyèdres semi-réguliers (sur treize, prismes et antiprismes exclus). Nous avons ajouté les symboles h (hexagone), o (octogone) et d (décagone), ainsi que le numéro du polyèdre dans la classification de Torquato.

- $4t, 4h$, Tétraèdre tronqué $A1$, $(12, 18, 8)$, par troncature d'un tétraèdre.
- $8t, 6c$, Cuboctaèdre $A11$, $(12, 24, 14)$, par troncature d'un octaèdre ou d'un cube.
- $6c, 8h$, Octaèdre tronqué $A13$, $(24, 36, 14)$, par troncature d'un octaèdre.
- $8t, 6o$, Cube tronqué $A12$, $(24, 36, 14)$, par troncature d'un cube.

- $8t, 18c$, (petit) Rhombicuboctaèdre $A9$, (24, 28, 26), par troncature d'un cube ou d'un octaèdre.
- $12p, 20h$, Icosaèdre tronqué $A2$, (60, 90, 32), par troncature d'un icosaèdre.
- $20t, 12p$, Icosidodécaèdre $A8$, (30, 60, 32), par troncature d'un icosaèdre ou d'un dodécaèdre.
- $20t, 12d$, Dodécaèdre tronqué $A10$, (60, 90, 32), par troncature d'un dodécaèdre [manque le poids].
- $20t, 30c, 12p$, (petit) Rhombicosidodécaèdre $A5$, (60, 120, 62), par troncature d'un icosaèdre ou d'un dodécaèdre [manque le poids].
- Enfin la dernière ligne évoque, sans plus de détails, les deux polyèdres
 - [i] $12c, 8h, 6o$, Cuboctaèdre tronqué ou grand Rhombicuboctaèdre $A7$, (48, 72, 26),
 - [ii] $30c, 20h, 12d$, Icosidodécaèdre tronqué ou grand Rhombicosidodécaèdre $A4$, (120, 180, 62).

Il faut noter que les deux derniers archimédiens

- [i] $32t, 6c$, Cube camard $A3$, (24, 60, 38),
- [ii] $80t, 12p$, Dodécaèdre camard $A4$, (60, 150, 92)

sont absents. Comme pour les pyramides générales ou les prismes/antiprismes, aucun d'eux ne peut être obtenu par des troncatures élémentaires ; de plus les calculs qu'ils impliquent sont nettement plus complexes que pour les onze autres polyèdres archimédiens.

3. À l'inverse du choix costabélien, qui était de simplement signaler les anomalies (cf. pages 8 et 9), notre traduction a corrigé toutes les erreurs connues par son auteur relativement au manuscrit où aux éditions d'Adam-Tannery, Pierre Costabel et Pasquale Joseph Federico. Voici la liste de tous les points sur lesquels nous avons du travailler afin d'arriver à une rédaction aussi définitive qu'il nous a été possible.

- * À la différence de Federico ou d'Adam-Tannery, nous avons laissé, telles quelles, des expressions comme $\sqrt{\frac{125}{144}}$ et $\sqrt{\frac{11}{2} + \frac{6\sqrt{2}}{2}}$, c'est-à-dire $\frac{5\sqrt{5}}{12}$ et $1 + \frac{3}{\sqrt{2}}$, au lieu de les simplifier comme on le ferait aujourd'hui : les hommes du dix-septième siècle n'avaient pas, sur ce point, nos critères d'élégance.
- * Nous n'avons pas ajouté à la liste cartésienne des troncatures certaines autres possibles, comme dans le cas des dix tétraèdres que l'on peut obtenir en sélectionnant convenablement quatre sommets parmi les vingt d'un dodécaèdre régulier ou lors de l'étude de son second polyèdre semi-régulier (composé de huit triangles et six carrés), qui peut être obtenu par troncatures, non seulement d'un cube d'un octaèdre d'arête $2u$ ou d'un cube d'arête $u\sqrt{2}$, comme il est indiqué dans le manuscrit, mais aussi d'un tétraèdre régulier d'arête $4u$.
- * La première colonne est incomplète : il y manque deux poids algébriques, à savoir $\frac{33}{2}n^3 - \frac{41}{2}n^2 + 5n$ et $18n^3 - 25n^2 + 8n$. De plus, dans la dernière ligne du texte, Descartes reconnaît avoir commis deux oublis (sur quatre en réalité). Le premier corps signalé est composé de huit hexagones et douze carrés, mais aussi de six octogones qu'il a laissés de côté (erreur corrigée entre crochets). Comme on l'a vu, leurs poids sont respectivement $\frac{40}{3}n^3 - 17n^2 + \frac{14}{3}n$ et $37n^3 - 52n^2 + 16n$.
- * Pourquoi Descartes ne parle-t-il pas de deux des polyèdres archimédiens, qualifiés de « snub » (camus, écrasé) par les anglo-saxons et respectivement définis par $(f_3 = 32, f_4 = 6)$ et $(f_3 = 80, f_5 = 12)$, de poids respectifs $\frac{19}{3}n^3 - 8n^2 + \frac{8}{3}n$ et $\frac{109}{6}n^3 - \frac{153}{6}n^2 + \frac{25}{3}n$?

Rappelons que Costabel et Federico signalent que ce sont les seuls qui ne peuvent être obtenus par troncatures simples de polyèdres réguliers ; le premier ajoute que ce sont les seuls pour lesquels cinq

arêtes convergent en un même sommet. Enfin Coxeter signale, à propos du livre de Federico, que ce sont les seuls dont les mesures font intervenir des racines cubiques : c'est n'est vrai que pour le premier (par l'intermédiaire du *nombre de Tribonacci*) ; pour le second le problème est encore bien plus complexe, car faisant intervenir des équations du douzième degré.

- * Signalons de nombreuses coquilles numériques : 392 au lieu de 329 (cf. AT), 200 au lieu de 220 (faute de Pierre Costabel), 9245 au lieu de 2945 (cf. AT), $\frac{17}{6}$ au lieu de $\frac{17}{16}$ (cf. AT), $-\frac{9}{2}$ au lieu de -9 (présent dans la copie leibnizienne), $\sqrt{\frac{3}{2}}$ au lieu de $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{3}$ au lieu de $\sqrt{\frac{3}{4}}$ (cf. AT), $\sqrt{\frac{15}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}}$ au lieu de $\sqrt{\frac{15}{4}} + \frac{13}{4}$ (cf. AT), $\sqrt{\frac{11}{2}}$ au lieu de $\sqrt{\frac{11}{3}}$ (cf. AT), $\sqrt{5 + \sqrt{8}}$ au lieu de $\sqrt{5 + 8\sqrt{8}}$ (cf. AT), $\sqrt{\frac{37}{2} + \frac{15}{2}\sqrt{5}}$ au lieu de $\sqrt{\frac{37}{2} + \frac{15}{2}}$ (cf. AT), $\sqrt{\frac{11}{2} + \frac{6}{2}\sqrt{2}}$ au lieu de $\sqrt{\frac{17}{2} + 6\sqrt{2}}$ et $\frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ au lieu de $\frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{3}{2}$ (faute de Pierre Costabel), mais aussi d'un signe $-$ au lieu d'un $+$ (cf. AT), et même de l'insertion systématique de signes $+$ ou $-$ négligés en fin de seconde colonne, sans doute par manque de temps de Leibniz.

Nous avons aussi rétabli (comme Costabel et Federico) une ligne (cube [de côté] $u\sqrt{2}$) en dernière colonne, absente chez Adam et Tannery.

- * En dehors de cela, à la différence d'Adam et Tannery, nous n'avons pas complété les deux dernières lignes de la seconde colonne par les poids polyédraux des huitième et neuvième polyèdres archimédiens recensés par Descartes.

Ainsi se termine, sous le signe du gnomon, un Traité de mathématiques - le premier à avoir été écrit par Descartes -, dont le début se voulait une théorie générale des polyèdres, aboutissant plus ou moins sur le fameux théorème d'Euler, les deux bouts de la chaîne faisant preuve de grande originalité.

À cause de sa découverte tardive, son influence sur le développement mathématique des dix-septième et dix-huitième siècle a été nul. Reconnaissions d'ailleurs que ce texte de jeunesse prouve une évidente virtuosité algébrique de l'auteur, mais aucun trace réelle de génie à la différence de *La Géométrie*. Mais on peut y lire des signes avant-coureurs de l'introduction du nombre dans les figures les plus anciennes, et ce sans l'aide de coordonnées qui ne viendront que plus tard mais iront dans le même sens. Nous ne saurons jamais quels développements Descartes aurait pu tirer de ses calculs polynomiaux. Toujours est-il qu'il avait, aux alentours de sa trentième année, déjà une très forte puissance de calcul sur laquelle il pouvait s'appuyer pour découvrir de nouveaux horizons : ce chapitre méconnu de son histoire devrait être maintenant plus accessible, en apportant une lumière plus forte sur ses années d'apprentissage.

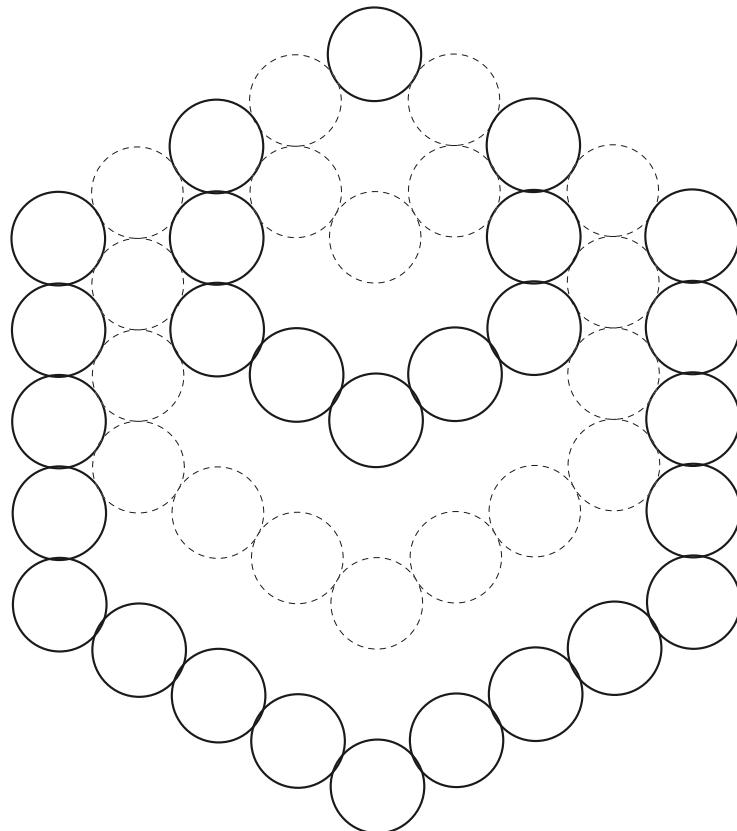


FIGURE 1.33 – Quarante cinq perles en cinq gnomons hexagonaux

Annexe : Une traduction (d'après Costabel)

Progymnasmata de solidorum elementis

PREMIÈRE PARTIE

L'angle solide droit est celui qui embrasse un huitième de sphère, même s'il n'est pas constitué de trois plans à angles droits. Tous les angles plans qui le circonscrivent, pris ensemble, sont égaux à trois droits.

De même que dans une figure plane tous les angles externes, pris ensemble, sont égaux à quatre droits, de même dans un corps solide tous les angles solides externes, pris ensemble, sont égaux à huit angles solides droits. Par angle externe j'entends la courbure et l'inclinaison des plans l'un par rapport à l'autre, qu'il faut mesurer à l'aide des angles plans qui comprennent l'angle solide. En effet la différence entre quatre angles droits <recouvrant> un plan et l'agrégat de tous les angles plans formant un angle solide désigne l'angle solide externe.

Si l'on multiplie quatre angles plans droits par le nombre d'angles solides et si l'on retranche 8 angles plans droits du produit, il reste l'agrégat de tous les angles plans formant la surface du corps solide considéré.

Dans une pyramide, il y a toujours autant de faces que d'angles <solides>. Dans un prisme, la moitié du nombre des angles solides est inférieure de deux unités au nombre des faces. Dans une pyramide doublée, la moitié du nombre de faces est inférieure de deux unités au nombre des angles <solides>. Il y a aussi d'autres corps pour lesquels on peut imaginer deux extrémités et plusieurs zones centrales.

Dans un corps il y a au moins trois fois plus d'angles plans que d'angles solides. Si l'on retranche deux unités du nombre des angles solides contenus dans un corps et si l'on multiplie le reste par deux, on a le nombre maximal de faces. Si l'on divise par deux le nombre des angles <solides>, s'il est pair, et ce <même> nombre augmenté d'une unité pour rendre la division

possible, s'il est impair, le quotient augmenté de deux minore alors le nombre des faces. Il y a la plus grande réciprocité entre faces et angles solides.

Toutes les pyramides équilatères sont inscrites dans la sphère. Dans un cône rectangle (hauteur égale au demi-diamètre de la base), la superficie convexe est à la base ce que $\sqrt{2}$ est à l'unité, comme pour les lignes simples.

On démontre de la manière suivante qu'il n'y a que cinq corps réguliers : si l'on note α le nombre d'angles solides et n celui des faces, on doit pouvoir diviser exactement $2\alpha - 4$ par n et $2n - 4$ par α ; autrement en effet il est certain et évident que le corps ne peut être régulier. Or cela ne peut être que si α est 4, 6, 8, 12, 20, et semblablement si n est 4, 8, 6, 20, 12, d'où la génération de cinq corps réguliers.

Tous les rhomboïdes et toutes les pyramides circonscrivent une sphère.

Pour reconnaître si un corps solide donné peut être inscrit dans une sphère, il faut d'abord savoir si toutes ses faces sont inscriptibles dans un cercle, ce qui est nécessaire. Cela acquis, si trois angles d'une de ses faces sont équidistants du centre de la sphère <éventuelle>, il sera aussi certain que tous les autres angles de la même face sont à la même distance de ce centre et, par voie de conséquence, qu'il en sera donc de même pour tous les angles des faces voisines qui rencontrent ceux de la face précédente dans les mêmes angles solides.

Connaissant l'agrégat de tous les angles plans à la surface d'un corps solide donné, trouver le nombre d'angles solides de ce corps. Ajouter 8 au nombre donné, puis diviser par 4 ; le nombre cherché doit être ce quotient si la division est exacte, faute de quoi l'on est certain qu'il n'existe pas de corps de ce genre.

Connaissant l'agrégat de tous les angles plans et le nombre de faces, trouver le nombre des angles plans. Multiplier le nombre de faces par 4, puis ajouter l'agrégat des angles plans ; le nombre des angles plans sera la moitié du total obtenu. Soit par exemple 72 l'agrégat de tous les angles plans, 12 le nombre des faces dont le quadruple est 48 qui, ajouté à 72, donne 120 dont la moitié est 60 : sur un tel corps il y a donc 60 angles plans.

Sur la surface d'un corps solide il y a toujours deux fois plus d'angles plans que de côtés, car un côté est toujours commun à deux faces. S'il est dit que

toutes les faces contiennent le même nombre d'*<angles>* plans, le nombre de ces angles pourra donc être exactement divisé par le nombre des faces, et le quotient sera le nombre d'angles d'une face. De là on connaîtra aisément, à partir de la seule connaissance du nombre des angles plans et du nombre de faces, combien il doit y avoir d'angles dans une face. Par exemple, s'il y a 5 faces et 18 angles plans, alors ou bien 2 de ces faces sont triangulaires et 3 carrées, ou bien 3 sont triangulaires, une carrée et une autre pentagonale, ou bien enfin une est hexagonale et 4 triangulaires. Mais parce que ce corps a 6 angles solides, il ne peut exister de corps de ce genre que celui . . .

Je remarque trois sortes d'égalités ou d'inégalités dans les angles solides : on appelle égaux ceux qui sont compris entre un même nombre d'angles plans, et aussi ceux qui contiennent la même inclinaison, auquel cas on dira que les angles extérieurs ou les inclinaisons sont égaux, la première éventualité étant qualifiée d'égalité arithmétique. Enfin, on appelle égaux au sens le plus propre ceux qui comprennent la même portion de sphère, et ils seront dit égaux en capacité.

Parmi des angles solides égaux en inclinaison, le plus grand en capacité est celui qui l'emporte arithmétiquement, et le plus grand de tous en capacité est l'angle conique.

Je pose toujours α pour le nombre d'angles solides et φ pour le nombre de faces. L'agrégat de tous les angles plans est $4\alpha - 8$, et le nombre φ est $2\alpha - 4$ si l'on compte autant de faces qu'il peut y avoir de triangles. De même, le nombre des angles plans est $6\alpha - 12$, puisqu'il faut compter un angle pour le tiers de deux droits. Maintenant, si je pose 3α pour les trois angles plans (nombre minimum requis pour composer l'un des angles solides), il y en a $3\alpha - 12$ de trop, somme à ajouter à chacun des angles solides, de sorte que la répartition soit uniforme. Le véritable nombre des angles plans est $2\varphi + 2\alpha - 4$, qui ne peut excéder $6\alpha - 12$; mais s'il est plus petit, l'excès doit être $+4\alpha - 8 - 2\varphi$.

Des rhomboïdes en quantité quelconque mais non équilatères peuvent être inscrits dans une sphère.

DEUXIÈME PARTIE

La meilleure de toutes les manières pour former les solides sera dans tous les cas de procéder par gnomons surajoutés à un angle vide donné, à partir duquel la figure entière peut être résolue en triangles.

De là, il est aisé de connaître que les poids de tous les polygonaux s'obtiennent en multipliant les triangulaires par les nombres 2, 3, 4, 5, 6, etc., et en soustrayant du produit $\frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$ multiplié par 2, ce qui fait $\frac{2}{2} n^2 + \frac{2}{2} n$, dont on retranche n , ce qui fait n^2 . De même si l'on multiplie par 3 et si l'on retranche $2 < n >$ du produit, on a le poids des pentagonaux etc.

Les cinq corps réguliers, considérés simplement en eux-mêmes, se forment par addition d'un gnomon, comme l'ont été les surfaces.

Tétraèdres

F	$-$	R	$+$	A ,	O	F	$-$	R	$+$	A ,	O	F	$-$	R	$+$	A ,	O
1	$-$	0	$+$	0,	1	4	$-$	4	$+$	1,	1	15	$-$	20	$+$	6,	1
3	$-$	0	$+$	0,	4	12	$-$	8	$+$	1,	6	45	$-$	40	$+$	6,	12
6	$-$	0	$+$	0,	10	24	$-$	12	$+$	1,	19	90	$-$	60	$+$	6,	48
10	$-$	0	$+$	0,	20	40	$-$	16	$+$	1,	44	150	$-$	80	$+$	6,	124

Octaèdres

Icosaèdres

Cubes

Dodécaèdres

F	$-$	R	$+$	A ,	O	F	$-$	R	$+$	A ,	O
3	$-$	3	$+$	1,	1	9	$-$	18	$+$	10,	1
12	$-$	6	$+$	1,	8	45	$-$	36	$+$	10,	20
27	$-$	9	$+$	1,	27	108	$-$	54	$+$	10,	84
48	$-$	12	$+$	1,	64	198	$-$	72	$+$	10,	220

C'est aussi cette règle que l'on doit suivre pour produire les lignes polygonales :

$R - A,$	O						
1 - 0,	1	2 - 1,	1	3 - 2,	1	4 - 3,	1
2 - 0,	3	4 - 1,	4	6 - 2,	5	8 - 3,	6
3 - 0,	6	6 - 1,	9	9 - 2,	12	12 - 3,	15
4 - 0,	10	8 - 1,	16	12 - 2,	22	16 - 3,	28

Si nous nous représentions ces figures comme mesurables, ce devrait alors être avec des unités toutes comprises de même nature que ces figures mêmes : à savoir pour les triangles des unités triangulaires, les pentagones se mesurant par rapport à un pentagone unité etc. La proportion d'une figure plane à sa racine serait alors la même que celle d'un carré à sa racine, et celle d'un solide la même que celle d'un cube : par exemple si la racine est 3, le plan sera 9, le solide 27 etc., ce qui vaut aussi, en deux mots, pour le cercle, la sphère et toutes les autres figures. Si en effet la circonférence d'un cercle est triple de celle d'un autre, son aire sera neuf fois plus grande. On s'avise par là que ces progressions dans notre *mathesis*, n , n^2 , n^3 etc., ne sont pas liées exclusivement aux figures de la droite, du carré, du cube, mais qu'on désigne par elles de façon générale les différentes espèces de mesure.

$$\begin{array}{ccccccc} 18 & + & 10 & - & 48 & + & 21, & 1 \\ 54 & + & 50 & - & 96 & + & 21, & 30 \\ 108 & + & 120 & - & 144 & + & 21, & 135 \end{array}$$

Pour un corps constitué de 4 hexagones et 4 triangles, il y a 18 côtés, 12 angles, 8 faces. Son gnomon est donc constitué de 2 hexagones et 3 triangles, moins six racines, + 2 angles.

	$F + F - R + A,$	O	Pour un corps constitué de 8 faces triangulaires et 6 carrées il y a 14 faces et 24 angles
Gnomon	$3 + 2 - 6 + 2,$	1	
	$9 + 12 - 12 + 2,$	12	et son gnomon consiste en 6 triangles et 4
	$18 + 30 - 18 + 2,$	44	faces carrées – 14 racines, + 5 angles.
	$30 + 56 - 24 + 2,$	108	
	$45 + 90 - 30 + 2,$	215	
	$F + F - R + A,$	O	Pour un corps constitué de 8 faces triangulaires et 6 carrées, il y a 24 côtés, 12 angles
Gnomon	$6 + 4 - 14 + 5,$	1	
	$18 + 16 - 28 + 5,$	12	et 14 faces. Son gnomon consiste en 6 triangles et 4 faces carrées – 14 racines, + 5
	$36 + 36 - 42 + 5,$	47	
	$60 + 64 - 56 + 5,$	120	angles.
		(245)	
Gnomon	$6 + 5 - 23 + 13,$	1	Pour un corps constitué de 8 faces hexagonales et 6 carrées, il y a 36 côtés, 24 angles
	$36 + 20 - 46 + 13,$	24	103 et 14 faces. Son gnomon a 6 faces hexagonales et 5 carrées, moins 23 racines, + 13
	$90 + 45 - 69 + 13,$	103	
	$168 + 80 - 92 + 13,$	272	angles.
	$7 + 4 - 20 + 10,$	1	Pour un corps constitué de 8 faces triangulaires et 6 octogonales, il y a 36 côtés,
	$21 + 32 - 40 + 10,$	24	24 angles, 14 faces. Son gnomon a 4 faces octogonales et 7 triangulaires, moins 20 racines, plus 10 angles.
	$42 + 84 - 60 + 10,$	100	
	$70 + 160 - 80 + 10,$	260	
	$7 + 15 - 37 + 16,$	1	Pour un corps constitué de 18 carrés et 8 triangles, il y a 48 côtés, et 24 angles,
	$21 + 60 - 74 + 16,$	24	et 26 faces. Et son gnomon consiste en 15 faces carrées et 7 triangulaires, – 37 racines, plus 16 angles.
	$42 + 135 - 111 + 16,$	106	
	$70 + 240 - 148 + 16,$	284	

(À cet endroit Leibniz a écrit - en latin naturellement - « De ceux-ci maintenant les différences sont ainsi définies, d'abord », puis a dessiné une matrice de six lignes et deux colonnes étudiée page 70.)

$$\begin{array}{rccccc}
 & & & \text{Corps fait de } 20 \text{ triangles et } 12 \text{ pentagones ; } \\
 1|1 & + & 18 & - & 76 & + & 48, & 1 & \text{gones ; } 60 \text{ côtés, } 30 \text{ angles, et son gnomon} \\
 5|5 & + & 108 & - & 152 & + & 48, & 60 & \text{a } 18 \text{ faces triangulaires et } 10 \text{ pentagonales,} \\
 13|2 & + & 70 & - & 228 & + & 48, & 282 & \text{moins } 48 \text{ racines, plus } 21 \text{ angles.}
 \end{array}$$

Les expressions algébriques de ces nombres figurés se trouvent en multipliant l'exposant de la face augmenté de $\frac{1}{2}n$ par $\frac{1}{3}n + \frac{1}{3}$, puis par le nombre de faces, et cela autant de fois qu'il y a divers types de faces dans le corps donné ; puis en ajoutant ou retranchant au produit le nombre de racines multiplié par $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ etc, et le nombre des angles multiplié par n .

Soit par exemple à chercher les expressions adéquates aux nombres figurés qui représentent le corps formé de 20 triangles et 12 pentagones : puisque le gnomon de ce corps est constitué de 18 faces triangulaires et de 10 pentagonales moins 48 racines plus 21 angles, j'ajoute d'abord $\frac{1}{2}n$ à $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ qui est l'exposant de la face triangulaire, et je multiplie le résultat (à savoir $\frac{1}{2}n^2 + n$) par $\frac{1}{3}n + \frac{1}{3}$, ce qui donne $\frac{1}{6}n^3 + \frac{3}{6}n^2 + \frac{2}{6}n$, que je multiplie par 18, ce qui donne $3n^3 + 9n^2 + 6n$. Ensuite j'ajoute aussi $\frac{1}{2}n$ au nombre $\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ qui est l'exposant de la face pentagonale, ce qui donne $\frac{3}{2}n^2$; cela multiplié par $\frac{1}{3}n + \frac{1}{3}$ donne $\frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2$ et ensuite par 10, ce qui donne $5n^3 + 5n^2$. En le joignant au nombre précédent, on obtient $8n^3 + 14n^2 + 6n$. D'où, si l'on enlève 48 (le nombre de racines) multiplié par $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, c'est-à-dire $24n^2 + 24n$, cela donne $8n^3 - 10n^2 - 18n$; et si l'on ajoute $21n$ à cause des 21 angles, cela donne $8n^3 - 10n^2 + 3n$, le nombre algébrique cherché.

TROISIÈME PARTIE

Voici enfin les poids de tous nos 14 solides, tels que nous les imaginons résulter des progressions arithmétiques :

		Volume	Diamètre	
Poids du tétraèdre	$\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$	$u^3 \sqrt{\frac{1}{72}}$	$u \sqrt{\frac{3}{2}}$	vient d'un cube de côté $u \sqrt{\frac{1}{2}}$
de l'octaèdre	$\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{3}n$	$u^3 \sqrt{\frac{2}{9}}$	$u \sqrt{2}$	vient d'un tétraèdre de côté $2u$
du cube	$1u^3$	$1u^3$	$u\sqrt{3}$	
de l'icosaèdre	$\frac{5}{2}n^3 - \frac{5}{2}n^2 + n$	$u^3 \left(\sqrt{\frac{125}{144}} + \frac{5}{4} \right)$	$u \sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$	
du dodécaèdre	$\frac{9}{2}n^3 - \frac{9}{2}n^2 + n$	$u^3 \left(\frac{7}{4}\sqrt{5} + \frac{15}{4} \right)$	$u \left(\sqrt{\frac{15}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}} \right)$	
Corps de 4 hexagones, 4 ∇	$\frac{11}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{3}n$	$u^3 \sqrt{\frac{529}{72}}$	$u \sqrt{\frac{11}{2}}$	vient d'un tétraèdre de côté $3u$
de 8 ∇ et 6 \square	$\frac{7}{3}n^3 - 2n^2 + \frac{2}{3}n$	$u^3 \sqrt{\frac{50}{9}}$	$2u$	vient d'un $\begin{cases} \text{octaèdre} & 2u \\ \text{cube} & u\sqrt{2} \end{cases}$
8 hexag. et 6 \square	$\frac{17}{3}n^3 - 6n^2 + \frac{4}{3}n$	$u^3 \sqrt{128}$	$u\sqrt{10}$	octaèdre $3u$
8 ∇ 6 octog.	$\frac{31}{6}n^3 - \frac{9}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$	$u^3 \left(\sqrt{\frac{392}{9}} + 7 \right)$	$u \sqrt{7 + \sqrt{32}}$	cube $u(1 + \sqrt{2})$
8 ∇ 18 \square	$\frac{37}{6}n^3 - \frac{15}{2}n^2 + \frac{7}{3}n$	$u^3 \left(\sqrt{\frac{200}{9}} + 4 \right)$	$u \sqrt{5 + \sqrt{8}}$	$\begin{cases} \text{cube} & u(\sqrt{2} + 1) \\ \text{octaèdre} & u\sqrt{\frac{11}{2} + \frac{6}{2}\sqrt{2}} \end{cases}$
20 hexag. 12 pent.	$\frac{35}{2}n^3 - \frac{47}{2}n^2 + 7n$	$u^3 \left(\sqrt{\frac{9245}{16}} + \frac{125}{4} \right)$	$u \sqrt{\frac{29}{2} + \frac{9}{2}\sqrt{5}}$	icosaèdre $3u$
20 ∇ 12 pent.	$8n^3 - 10n^2 + 3n$	$u^3 \left(\frac{17}{6}\sqrt{5} + \frac{15}{2} \right)$	$u(\sqrt{5} + 1)$	$\begin{cases} \text{icosaèdre} & 2u \\ \text{dodécaèdre} & u(\sqrt{5} - 1) \end{cases}$
20 ∇ 12 décag.		$u^3 \left(\frac{235}{12}\sqrt{5} + \frac{165}{4} \right)$	$u \sqrt{\frac{37}{2} + \frac{15}{2}\sqrt{5}}$	dodécaèdre $u\sqrt{5}$
20 ∇ 30 \square 12 pent.		$u^3 \left(\frac{29}{3}\sqrt{5} + 20 \right)$	$u \sqrt{11 + \sqrt{80}}$	$\begin{cases} \text{icosaèdre} & u(3\sqrt{5} - \frac{1}{2}) \\ \text{dodécaèdre} & u(3\sqrt{5} - \frac{3}{2}) \end{cases}$

Restent 2 corps, l'un de <6 octogones,> 8 hexagones et 12 carrés, l'autre de 30 carrés, 12 décag. et 20 hexag.