La formation des mathématiciens français au vingtième siècle

Classes préparatoires et École Normale Supérieure

À l'orée du vingtième siècle, Émile Borel, René-Louis Baire, Henri Lebesgue ont ouvert une période prestigieuse pour les mathématiques françaises. Aujourd'hui leurs jeunes successeurs Pierre-Louis Lions, Jean-Christophe Yoccoz et Laurent Lafforgue, sont tous médaillés Fields. Entre ces deux trios prestigieux, il faut évidemment citer les "Bourbakistes" (André Weil, Jean Dieudonné, Henri Cartan, Laurent Schwartz...), suivis entre autres par Jean-Pierre Serre, Prix Abel 2003, et Alain Connes, également médaillés.

Outre leurs capacités, ces hommes ont en commun d'avoir été formés à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm (respectivement en 1889, 1891, 1894, 1922 à 1934, 1945, 1966, 1975, 1975 et 1986), établissement d'enseignement supérieur qui, pour les mathématiciens, a pris vers 1900 la relève de l'École polytechnique, *alma mater* de Louis-Augusin Cauchy, Charles Hermite et tant d'autres. Il existe bien sûr des contre-exemples, dont le moindre n'est pas Alexandre Grothendieck, qui ont suivi une formation plus classique dans les Facultés des Sciences ; mais même eux ont subi, au moins par contre-coup, l'influence de l'ENS d'où sont sortis nombre de leurs collègues.

Ces "grandes écoles", comme les étudiants français les appellent non sans emphase, sont précédées, en sortant du baccalauréat, de deux années de "classes préparatoires" qui sont une forte singularité de notre enseignement universitaire. C'est à l'étude, étalée sur cent ans, de ce système très particulier, marquant profondément l'école mathématique qui en est sortie, qu'est consacrée cette note.

Un enseignement mathématique fondé sur les géométries

L'enseignement traditionnel des mathématiques - qui fut durant de longs siècles réduit à une simple transmission d'une science figée par des anciens mandarins en direction de leurs successeurs -, resta longtemps limité à deux chapitres : une algèbre très restreinte (essentiellement des techniques des équations algébriques de très petit degré), et surtout une géométrie dite euclidienne, invariante au cours des âges, encore bien vivante dans les manuels d'Adrien-Marie Legendre de 1794, qui resteront en usage pendant plus de cent ans.

La première moitié du dix-septième siècle (essentiellement Descartes et Fermat) vit l'arrivée de nouveaux chapitres, surtout par l'irruption de la géométrie analytique et le bouleversement de l'algèbre par l'introduction d'un système de représentations écrites enfin performant. Le reste du siècle, pour sa part, vit l'éclosion des calculs différentiel et infinitésimal de Newton et Leibniz, dont l'influence sur les trois siècles suivant fut évidemment incommensurable.

Par la suite, la géométrie analytique connut deux prolongements dont l'importance fut considérable : l'introduction d'éléments dits "à l'infini", engendrant la géométrie projective réelle, et celles de points à coordonnées complexes, engendrant la géométrie complexe (les deux pouvant d'ailleurs être combinées). On peut noter également une géométrie dite "moderne" du début du vingtième siècle, particulièrement prisée en France, basée sur l'étude systématique de transformations homographiques et/ou involutives, permettant dans certains cas de se passer de calculs en en prévoyant le type de résultats ; elle a aujourd'hui presque disparu en raison de la grande fragilité de ses techniques, comme le jeune Laurent Schwartz le prouva en 1933 à son grand-oncle Jacques Hadamard par la production d'un paradoxe des plus déconcertants). Cela dit, les démonstrations dites de "géométrie pure" (à la Euclide, ou du moins de la forme que l'on supposait proche de la pensée euclidienne), gardèrent très longtemps un parfum d'élégance inégalée.

C'est sur la base de ces géométries que reposa essentiellement l'enseignement français des mathématiques de ce que l'on appelle maintenant le premier cycle (entre baccalauréat et licence, aujourd'hui les deux premières années du LMD). Cette courte note voudrait examiner plus précisément certains aspects de ce que furent, à ce niveau, les techniques de reproduction des mandarins mathématiciens français durant le vingtième siècle.

Il faut noter - c'est très important - que l'enseignement des classes préparatoires aux grandes écoles était loin d'être l'apanage des seuls futurs mathématiciens professionnels : un grand nombre des professeurs de lycée y sont passés et c'est encore le cas aujourd'hui : le tri entre les capacités de chercheur et d'enseignant ne se fait qu'à l'issue de ce cycle.

Mais surtout ces classes étaient (sont) le point de passage presque obligé des cohortes d'ingénieurs sortant des écoles comme Polytechnique, Centrale, les Mines et les Ponts, et toute une série d'établissements de moindre renommée. Leur influence sur la société scientifique et technologique française a donc été, et reste, tout à fait essentielle, bien qu'étant a priori assez éloignée de ce qui se fait dans la plupart des pays étrangers (qu'on n'oublie pas cependant, par exemple, qu'un organisme comme le MIT, en dépit de toutes les différences immédiatement visibles, n'est pas sans rappeler certains aspects positifs de cette singularité française).

Ce très large éventail des débouchés de ces classes justifiait clairement, pendant plus de cinquante ans, la suprématie de la géométrie sur les autres branches des mathématiques. En particulier les applications à la physique et aux sciences de l'ingénieur reposèrent pendant très longtemps presque exclusivement sur elle ainsi qu'aux calculs basiques d'équations algébriques et surtout d'intégrales variées. Cette situation avait sa justification profonde.

Au départ, l'enseignement destiné à la formation des mathématiciens en herbe comme aux autres étudiants reposait donc pour sa plus grande part sur la géométrie, et tout spécialement la géométrie analytique classique depuis 1637. Nous verrons plus loin que cette situation a, assez logiquement, beaucoup changé au cours du siècle.

Deux exemples de questions de concours

La forte singularité du système français de classes préparatoires repose sur plusieurs principes simples. En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, qui a pu occuper jusqu'à quatorze heures par semaine, les étudiants n'ont affaire qu'à un seul professeur, qui leur délivre un cours en général original (même si les élèves ont toute liberté de se procurer des livres de référence), qui est responsable de tout : exposés magistraux, séances d'exercices en commun (travaux pratiques et dirigés), choix et corrections de nombreux problèmes à rédiger à la maison ou sur table, généralement des énoncés d'épreuves proposées au concours les années précédentes. Il doit aussi organiser des séances d'interrogations individuelles, confiées soit à lui-même soit à d'autres professeurs, permettant une préparation aux oraux individuels, là aussi en utilisant généralement des énoncés relevés à chaque session.

Voici tout d'abord un exercice typique de ceux que l'on propose aujourd'hui, individuellement, dans l'une de ces séance d'interrogation orales qui ont lieu chaque semaine à l'intention par exemple de candidats à l'École Normale Supérieure.

`Montrer que le groupe spécial unitaire`

$$SU(2) = \{U \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) \mid {}^t\bar{U}U = I_2, \quad \det U = 1\}$$

`est connexe par arcs.`

Voici une solution possible, que l'étudiant a vingt minutes pour découvrir et mettre au point. Si $U = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, une condition nécessaire et suffisante pour que U appartienne au groupe s'écrit

$$U = \begin{bmatrix} p & q \\ -\bar{q} & \bar{p} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad p\bar{p} + q\bar{q} = 1.$$

Il existe donc trois réels (α, β, γ) tels que l'on puisse écrire

$$U = \begin{bmatrix} (\cos\alpha)\, e^{i\beta} & (\sin\alpha)\, e^{i\gamma} \\ -(\sin\alpha)\, e^{-i\gamma} & (\cos\alpha)\, e^{-i\beta} \end{bmatrix}.$$

`La fonction continue` φ `définie, pour tout réel` t`, par l'égalité`

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} (\cos\alpha t)\, e^{i\beta t} & (\sin\alpha t)\, e^{i\gamma t} \\ -(\sin\alpha t)\, e^{-i\gamma t} & (\cos\alpha t)\, e^{-i\beta t} \end{bmatrix}$$

`prend ses valeurs dans` $SU(2)$ `et vérifie` $\varphi(0) = I_2$`,` $\varphi(1) = U$`, ce qui permet de relier` U `à` I_2`, puis à n'importe quelle matrice` $V \in SU(2)$.

Cela rappelle, naturellement, les fameux *tripos* de l'université de Cambridge, sur lesquels brillèrent Hardy et tant d'autres. Donner ici un exemple analogue d'épreuve écrite, proposée typiquement en quatre heures, serait impossible faute de place. Heureusement, le passé nous permet d'en donner quand même une idée qui tienne en peu de lignes. Il s'agit de l'épreuve de géométrie analytique proposée à l'agrégation de 1903 (il s'agit du concours d'entrée dans la profession enseignante que passent les étudiants - et en particulier ceux de l'École Normale Supérieure - afin d'être recrutés comme professeurs de lycée ou d'entrer dans l'enseignement supérieur).

On considère une droite fixe A et deux droites fixes B et B' qui rencontrent A mais qui ne sont pas situées dans un même plan.
On sait que si on considère une surface du second ordre S qui passe par les trois droites A, B et B', son centre C est situé dans le plan P parallèle aux deux droites D et D' et équidistant de ces deux droites.
1) Lorsque le centre C décrit une droite dans le plan P, la surface S passe par une quatrième droite fixe s'appuyant sur B et B'.
2) Lorsque le point C décrit, dans le plan P, une courbe (Γ) de classe m, la surface S enveloppe une surface réglée Σ d'ordre $2m$ et, par chacune des trois droites A, B et B', il passe m nappes de cette surface Σ.
Montrer que la surface Σ peut être considérée comme engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur les deux droites B et B' et en restant tangente à un cylindre de classe m dont les génératrices sont parallèles à A. Trouver l'équation de ce cylindre.
3) Dans le cas particulier où la courbe (Γ) est une conique, la surface Σ est du quatrième ordre et admet la droite A comme droite double. Tout plan passant par A coupe alors cette surface en dehors de A, suivant une conique ; trouver le lieu du centre de cette conique.

Que deviennent les résultats précédents, lorsque la conique (Γ) *est tangente soit au plan déterminé par les droites* A *et* B*, soit au plan déterminé par* A *et* B'*, soit à ces deux plans à la fois ?*

Cet énoncé est très court par rapport aux normes actuelles (en moyenne huit pages pour une même épreuve de six heures). On peut le retrouver sur le site internet de la *Revue de Mathématiques Spéciales* (aujourd'hui *Revue de la filière mathématique* depuis 2004), suivi heureusement d'un corrigé dû à un élève, qui sera plus tard un mathématicien honorablement connu (Jules Haag).

Ce corrigé couvre cinq pages assez concises : il est encore très lisible - quoique l'on ne demanderait plus "l'équation" du cylindre, mais seulement "une équation", et que le concept de classe d'une surface soit maintenant hors programme. La partie la plus importante est à la fin, comme lorsque le bon vin est servi après les bouteilles plus ordinaires ; il s'agit d'une preuve "géométriquement pure", sans géométrie analytique, des principaux résultats obtenus. Signalons au passage que l'on peut trouver, toujours sur internet, la liste des lauréats de ce concours de 1903 : douze jeunes hommes, ce qui en dit long sur le caractère très ciblé d'un tel mode de recrutement des élites des enseignants de mathématique d'alors ; cette année-là, deux jeunes filles furent également lauréates, mais après avoir subi un autre concours.

Durant toutes ces années, les compilations relativement systématiques de ces épreuves, écrit et oral ensemble, sont pour l'essentiel encore disponibles, soit par les anciens cours régulièrement publiés et remaniés à chaque modification de programme, soit dans des revues spécialisées. L'ensemble représente une assez étonnante source de problèmes mathématiques dont l'utilité pédagogique est sans doute intéressante.

L'analyse, riche et déjà rigoureuse, du début du siècle

Dans les deux tomes, respectivement épais de 400 et 500 pages de son *Cours d'Algèbre* de 1889-1891, Boleslas Alexandre Niewenglowski, normalien, ancien professeur de spéciales au lycée Louis-le-Grand, premier rédacteur de la *Revue de Mathématiques Spéciales* en octobre 1890 destinée aux candidats à l'École Normale et à Polytechnique, futur inspecteur général, n'hésitait pas à traiter des parties ardues de l'algèbre et l'analyse (calcul différentiel et intégral) de son époque, proposant des exercices de Cauchy, Hermite et autres Laguerre, introduisant les nombres réels - appelés *incommensurables* - par des coupures à la Dedekind, démontrant fort correctement le théorème de d'Alembert et étudiant la première fonction continue sans dérivée de Weierstraß.

L'une des plus grandes sources de problèmes et d'exercices posés dans les classes préparatoires réside dans l'étude de la nature de séries (numériques ou dont le terme général dépend de certains paramètres), suivie de près par les longues suites de méthodes de résolution explicite d'équations différentielles - on ne trouve par contre aucune étude qualitative concernant les équations "non résolubles". Tout ces chapitres figurent dans ce cours, avec de nombreux détails ; à peu de choses près, liées à l'irruption très récente des moyens informatiques, ils auraient pu être utilisés pratiquement tels quels jusqu'à aujourd'hui.

On trouve aussi dans ce livre - en petits caractères il est vrai - une étude du théorème de Heine sur la continuité uniforme sur un segment d'une fonction continue d'après Lüroth, aujourd'hui encore acceptable à un détail près (nous savons d'ailleurs que le jeune Lebesgue avait entendu une preuve voisine de ce théorème, très abstrait pour l'époque, dans la classe où son professeur Humbert le préparait aux concours car ce dernier l'avait publiée quelques années auparavant dans la *Revue* déjà citée). Il est toutefois malheureux de découvrir pourtant dans un tel livre une erreur enfantine concernant deux séries numériques dont les termes u_n et v_n sont des infiniment petits équivalents à l'infini (mais cela prouve simplement que ce cours était pour l'essentiel original et non une dixième recopie d'un texte quasi-officiel).

Toute cette rigueur, qu'on aurait pu croire réservée à la génération dite "moderne", fera cependant malheureusement long feu : en 1950, des expressions comme "fonction continue" seront devenues presque vides de sens pour le jeune étudiant, qui devra attendre la licence pour recevoir une initiation plus conforme à la mathématique de son époque. Elle ne reviendra en force que vers les années 1970, à partir desquels l'enseignement en classes préparatoires cessera pour l'essentiel de cultiver des sujets trop convenus et mécaniquement académiques pour se rapprocher - un tout petit peu - de la mathématique vivante.

En algèbre proprement dite, la longue présentation de la théorie des équations algébriques - plus de 200 pages - culminait chez Niewenglowski avec les difficiles théorèmes de Descartes et Sturm. Suivront en 1911 trois volumes, tout aussi épais, de géométrie analytique par le même auteur (dont un cosigné par Émile Borel), conduisant quasiment les jeunes bacheliers aux portes des raides problèmes d'agrégation dont on a vu un exemple édifiant plus haut.

Il resterait à savoir si cette somme considérable, très intéressante pour des yeux modernes, correspondait bien au niveau effectif des enseignements donnés dans les premières années du vingtième siècle. Il est possible que ces livres n'aient finalement servi que d'ouvrages de référence, plus accessibles aux enseignants qu'aux enseignés. Mais même dans ce cas, l'existence d'ouvrages de cette qualité, suivis par quelques autres, n'a certainement pas été étrangère à la bonne tenue de ce qu'il est convenu d'appeler l'école française de mathématiques.

Des mathématiques exclusivement basées sur le calcul

Durant la première moitié du siècle, les mathématiques préparatoires au métier de mathématicien, comme à celui d'enseignant scientifique ou d'ingénieur dans les grandes écoles françaises, reposaient essentiellement sur un concept : apprendre à parfaitement maîtriser des calculs de toute sorte.

Les structures algébriques de base - groupes, anneaux, corps - étant totalement absentes du cursus normal de l'époque, le travail sur les équations, par exemple, consistait surtout à montrer quelque virtuosité sur les procédures d'élimination - importantes en géométrie analytique - ou dans les transformations d'équations directement issues de Descartes (par exemple trouver une équation ayant exactement comme racines les cubes des racines d'une équation donnée).

Le calcul était donc omniprésent, de la géométrie à l'algèbre (qui comprenait alors l'analyse). Pour ne prendre qu'un exemple, un exercice portant sur le calcul intégral se ramenait le plus souvent à la détermination d'une primitive d'une fonction continue plus ou moins simple. Le calcul numérique, à base de manipulations de tables parmi lesquelles les fameuses tables de logarithmes issues du dix-septième siècle, avait un certain poids : il a été aujourd'hui réduit à sa plus simple expression depuis l'invasion des calculatrices dites "scientifiques" puis programmables (à partir de 1972 et 1974) et enfin des micro ordinateurs, et personne ne le regrette.

Aujourd'hui où toutes ces techniques semblent assez dérisoires, il serait toutefois bon de se rappeler que les plus grands chercheurs que j'ai rencontré sont presque unanimes à dire qu'ils ont besoin de noircir des dizaines de pages, voire davantage, avant de pourvoir dégager des idées neuves et générales conduisant parfois à des articles d'exposition ne contenant que très peu de formules. La capacité forte de découvrir des symétries cachées dans des domaines très complexes a souvent besoin de tentatives plus humbles de débroussaillage grâce à des expérimentations "à la main", c'est-à-dire grâce à des calculs souvent fastidieux auxquels on ne s'habitue jamais si l'on n'en a pas eu une bonne pratique durant les années de formation.

Le "poids du cartable" au cours des âges

Lors du siècle, la taille des différents ouvrages traitant le programme d'entrée à l'École Normale a beaucoup varié, puisque l'on trouve par exemple en vente en 1956 un cours très concis, dû à Gaston Casanova, formé de quatre livres n'atteignant pas 1100 pages au total - il passera à plus de 1200 pages lors de l'édition de 1963 -, alors que le manuel de référence "standard" actuel (depuis 1999) est composé de deux gros volumes de respectivement 1375 et 1450 pages.

Pendant toutes ces années, l'édition scientifique française (florissante avec, par exemple, les maisons Gauthier-Villars, Masson, Vuibert ou Dunod), fournira régulièrement aux élèves des classes préparatoires et à leurs professeurs des cours de bon niveau, ainsi que des livres d'exercices assez copieux, souvent adoptés d'ailleurs par les étudiants du premier cycle universitaire qui n'étaient pas passés par le circuit de la préparation aux grandes écoles.

La collection qui a été la plus importante (en durée et en influence) fut lancée en 1935 par Hyppolite Commissaire, bientôt secondé par Georges Cagnac, passée ensuite aux mains de ce dernier qui s'entourera notamment d'Edmond Ramis, à son tour suivi par quelques collaborateurs plus jeunes, quasiment tous professeurs à Louis-le-Grand, assurant ainsi une continuité sur plus de soixante-dix ans. Sa taille, dépendant du nombre de volumes (entre cinq et deux) n'est jamais passée en dessous des 2500 pages. L'existence de tels monuments, considérés comme des classiques, permet de suivre, édition après édition, l'évolution incessante du cursus élémentaire qui a formé les mathématiciens français du siècle.

Ces livres épais ne peuvent être exploités avec bénéfice que si l'horaire donné à l'enseignement durant les deux années de préparation est assez conséquent. De fait, il a longtemps tourné entre 700 et 800 heures (cours magistral, séances d'exercices, travaux pratiques, devoirs sur table, sans compter des interrogations individuelles en dehors de ce cadre). Depuis 1994 ces horaires ont été réduits d'environ quinze pour cent, et davantage dans les sections davantage orientées vers les sciences physico-chimiques.

Dans les volumes de cours les plus anciens - avant 1970 -, on peut par exemple trouver une étude assez systématique de la collection de "courbes classiques" venues des Grecs (coniques, spirales, cissoïdes, conchoïdes...) ou des dix-septième et dix-huitième siècles (roulette, lemniscate, ovales cartésiennes et cassiniennes, astroïde, cardioïde, hypo et epi-cycloïdes...). Mises pratiquement à la fourrière après 1963 comme des antiquité sans valeurs, certaines d'entre elles ont pourtant effectué des retours assez surprenants sur la scène, de manière récente, par exemple dans la théorie des systèmes dynamiques où des improbables cardioïde et lemniscate ont fait une réapparition brutale dans l'étude des fractales chaotiques de Julia et de Mandelbrot ! Heureusement que les premiers créateurs de la théorie avaient quelques notions de ce que sont des courbes définies en coordonnées polaires, remontant à Descartes et Newton...

Il faut signaler ici que l'enseignement en classes préparatoires n'est plus exactement le même pour la préparation des futurs mathématiciens et des futurs physiciens. Rompant avec une tradition unitaire qui avait ses raisons propres, le système s'est diversifié à partir de 1973, puis plus profondément encore en 1995, par la création de parcours plus marqués vers les mathématiques, la physique-chimie ou les sciences de l'ingénieur. Il n'est pas seulement anecdotique de voir que le mot "mathématiques", présent dans les noms traditionnels de classes de "mathématiques supérieures" et "mathématiques spéciales", a été discrètement retiré des dénominations officielles des classes où les mathématiques jouent un rôle moins prioritaire.

Cela étant, ces réformes successives ont certainement restreint la domination de cette discipline, mais en tout cas jusqu'à aujourd'hui ce sont toujours les sections estampillées "mathématique" qui continuent à rassembler les meilleurs futurs chercheurs, même ceux qui envisagent une carrière forte en physique : cela peut se comprendre dans la mesure où personne ne sait quels seront demain les outils nécessaires aux autres disciplines, qui ont toujours fait largement appel à des ressources mathématiques parfois imprévues.

Une évolution continuelle et substantielle des programmes

Dès le milieu du siècle, la part de la géométrie, que l'on peut estimer aux deux tiers au temps de Borel et Lebesgue, passe environ au quart en 1950, pour être aujourd'hui réduite à moins d'un dixième du tout - sauf peut-être si l'on comptait l'algèbre bilinéaire et les espaces euclidiens comme étant des objets géométriques, ce qui ne serait pas stupide après tout. L'"analyse fine" (les fonctions numériques "à la française"), et surtout l'algèbre linéaire ont largement remplacé son rôle moteur.

Il était jadis inconcevable qu'un étudiant ambitieux ignore que la lemnicaste de Bernoulli était à la fois l'inverse et la podaire d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre. De la même façon, la connaissance sur le bout des doigts des très riches propriétés des cubiques circulaires à point double était un point de passage obligatoire.

Certaines parties du programme ont bien entendu complètement disparu : par exemple la totalité du quatrième tome du Casanova, intitulé *Mécanique, Calcul numérique, Géométrie descriptive* (ou de Monge), devenu *Cinématique, Travaux pratiques* en 1963, n'est plus qu'un souvenir (nostalgique ?) pour les enseignants et étudiants d'avant 1976. Il faut également noter que les théories des enveloppes de courbes et de surfaces, difficiles à rendre aussi rigoureuses que le reste de la géométrie qui avait pu être facilement formalisée, ont également été écartées. Il en fut de même de la géométrie projective, pourtant notamment encore utilisée dans les applications des courbes elliptiques, par exemple à la cryptographie moderne.

Certes elles ont été pour l'essentiel largement remplacées, notamment depuis les années 90 par l'irruption de l'informatique, d'abord sous forme d'enseignement de la programmation (Turbo-Pascal par exemple), puis d'utilisation plus ou moins intelligente de logiciels de calcul formel comme *Maple* ou *Mathematica*. On peut d'ailleurs regretter que l'abandon de la mécanique, même sous la forme simple de la cinématique, laissée aux physiciens, ait coupé un cordon ombilical pourtant toujours bien vivant entre les deux disciplines.

Il faut enfin noter que, depuis 1995, a été introduit un nouveau thème de travail, laissant aux étudiants une plus grande initiative : c'est ce que l'on appelle les “travaux d'initiative personnelle encadrés” (TIPE) ainsi que l'analyse de documents scientifiques (ADS), notamment proposés lors des oraux de l'école Polytechnique. Il s'agit ici d'une grande nouveauté, bien difficile à évaluer par des jurys, trop récente pour qu'on puisse dès maintenant porter maintenant un jugement serein sur cette innovation, considérée favorablement par un certain nombre d'enseignants et d'élèves (une variante plus légère vient d'ailleurs de commencer à exister au niveau des dernières années de lycée, avant le baccalauréat, mais risque d'être abandonnée à cause des lourdeurs pédagogiques et financières qu'elle implique).

Le problème sans doute le plus important qui reste à régler en ce qui concerne les classes préparatoires aux grandes écoles est la place qu'il conviendrait de donner au calcul des probabilités et à la statistique mathématique. Toutes deux sont actuellement totalement absentes de leurs programmes, à la différence de nombreux premiers cycles universitaires étrangers.

Jusqu'à présent, deux raisons se sont opposées à leur introduction, même dans le cursus des futurs mathématiciens. La première est que, même placé devant une masse horaire de plusieurs centaines d'heures, il reste à faire des choix très douloureux : personne aujourd'hui ne semble prêt à accepter la disparition totale de la géométrie, ni des réductions sensibles du bloc arithmétique + algèbre générale + algèbre linéaire ou surtout de l'analyse réelle qui constitue aujourd'hui le cœur de cet enseignement.

La seconde est beaucoup plus technique, et sans doute plus importante par rapport aux habitudes de rigueur qui ont toujours caractérisées ces classes. Parler de probabilités aujourd'hui, sauf si l'on se limite au cas fini sans grand intérêt, exige de maîtriser deux outils : un minimum de théorie de la mesure, avec tout un lourd environnement de vocabulaire ensembliste assez abstrait, et la maîtrise d'une intégrale assez fine qui semble encore hors de portée pour des lauréats tout frais du baccalauréat (on reviendra plus loin sur cette dernière question). Quoi qu'il en soit, la situation actuelle n'est pas satisfaisante.

Quand les mathématiques devinrent "modernes"

Le virage le plus important date du milieu du siècle, plus particulièrement par la publication des programmes nationaux des 27 juin 1956 et surtout 21 janvier 1963. Cette évolution se retrouve bien entendu dans la plupart des pays développés, et culminera par ce que l'on qualifiera de "mathématiques modernes" lors de leur irruption dans les lycées vers 1970.

Le premier coup de boutoir était assez raisonnable : seuls apparaissaient trois éléments nouveaux par rapport à la tradition, à savoir les corps, les espaces vectoriels et les matrices - vaguement assimilées à des sortes de super-déterminants. Mais sept ans plus tard entrent en scène les ensembles, les groupes, les anneaux, les corps, la diagonalisation des endomorphismes, les formes linéaires, bilinéaires, quadratiques, et enfin les espaces euclidiens et hermitiens. Dans l'importante mise à jour du Casanova, commencent à figurer des exercices très faciles, mais empruntés au fascicule de résultats de la *théorie des ensembles* de Nicolas Bourbaki...

Viendra ensuite une période - grosso modo entre 1975 et 1990 - où la sophistication des mathématiques des classes préparatoires aux grandes écoles a atteint un maximum, par rapport auquel celles d'aujourd'hui sont en assez net retrait. Pendant cette période, qui a vu notamment l'irruption de la topologie (espaces métriques, compacité, connexité, convexité, espaces vectoriels normés en particulier, voire espaces topologiques généraux dans certaines classes de pointe). La théorie des séries de Fourier (mais non celle de la transformation de Fourier) fera son apparition vers 1985.

Ainsi était-il de bon ton, pour briller aux interrogations orales des concours, de savoir déterminer la nature des composantes connexes de certains groupes "classiques" (suivant la terminologie de Dieudonné : voir plus haut), mais aussi d'avoir une connaissance de quelques chapitres simples du volume *Trigonometric series* de Zygmund, ou enfin d'avoir quelques familiarités avec les fameux livres d'exercices de Pólya et Szegö. Heureusement cette poursuite stupide d'érudition stérile entre examinateurs et étudiants prendra assez vite fin pour revenir à des conditions de travail nettement plus raisonnables vers 1990.

Quelle analyse pour le premier cycle ?

Une histoire particulièrement intéressante des variations des programmes sur tout un siècle consiste à examiner les différents enseignements de la notion d'intégrale (d'une fonction d'une variable réelle). Plus encore que celle de dérivation, née au même moment pour l'essentiel, c'est elle dont l'introduction a vraiment crée les mathématiques que nous connaissons.

Aujourd'hui comme en 1665 ou en 1900, la base des cours de calcul intégral repose sur la primitivation des fonctions continues, plus exactement des fonctions continues par morceaux. Une différence de taille cependant : depuis 1995, les programmes ont introduit des théorèmes "à la Lebesgue" (essentiellement de convergence dominée, de continuité et dérivation sous le signe somme), spécialement adaptés à ce cadre et donnés sans démonstration - ce qui était une très grande nouveauté. La notion d'intégrale multiple est souvent présentée uniquement dans le cadre des intégrales doubles, sans pouvoir être traitée de manière autre que heuristique (théorèmes de Fubini, changements de variables...)

Les calculs autrefois très classiques d'intégrales de surface, de recherche d'aires, de volumes, de moments d'intertie ou de centres de gravité, ainsi que d'application des formules de Green-Riemann, Stokes et Ostrogradsky, sont aujourd'hui pratiquement abandonnés, laissés aux enseignants de physique s'ils en éprouvent le besoin.

Vers le milieu du siècle, c'était la très classique "intégrale de Riemann", basée sur les sommes du même nom, qui était la règle. Savoir la manipuler demandait une certaine expertise des majorations d'expressions algébriques. L'extension de cette intégrale au cadre des fonctions vectorielles, d'après notamment une idée de Laurent Schwartz, était facile et fut donc rapidement adoptée.

On peut s'étonner que, depuis 1901, la création de cette intégrale de Lebesgue, dont l'influence fut énorme et reste aujourd'hui un outil insurpassable, n'ait pas conduit à son entrée en force, au moins lors de la formation des futurs mathématiciens. La réalité veut que les difficultés d'exposition qui lui sont inhérentes - notamment l'obligation de parler, si peu que ce soit, du concept de mesure ensembliste - n'ont pas encore pu être levées, et ce dans le monde entier d'ailleurs.

C'est ainsi que les étudiants français doivent d'abord se contenter de l'intégrale à la Newton (fonctions continues), au mieux de celle de Riemann, et n'aborder la "véritable" intégration que deux ans plus tard. Certains auteurs courageux ont bien essayé d'introduire, ici ou là, Lebesgue par le biais des intégrales de Henstock-Kurzweil, plus simples d'accès : mais pour le moment il semble que l'on bute toujours sur une certaine complexité appelant à de nouveaux progrès de nature plus pédagogique que scientifique.

En ce qui concerne le reste de l'analyse, il semble bien que l'attitude française des années 80 était la bonne : introduire une certaine dose de topologie d'espaces vectoriels normés, peut-être en se limitant aux espaces de dimension finie. Cela présente plusieurs avantages : d'abord ne pas laisser croire que tout tel espace est nécessairement euclidien ou hermitien, et ensuite de permettre certaines simplifications par généralisation raisonnable du matériel couvert. C'est ainsi que, pour caractériser les compacts, il suffit de parler de fermés bornés, ou même d'ensemble sur lesquels toute fonction continue à valeurs réelles possède un maximum et un minimum.

Par ailleurs l'accompagnement de la topologie normée par les premières notions de topologie induite sur une partie, outre qu'elle équivaut pratiquement à peu de frais à la notion de topologie métrique, permet de rendre plus intuitives et plus rigoureuses certaines preuves en diminuant la part de précautions oratoires indispensables en cas contraire. C'est ainsi que Boleslav Niewenglowski, l'auteur de si remarquables ouvrages avant même 1900, avait oublié dans sa démonstration du théorème de Heine que des segments du type $[x-h, x+h]$ pouvaient ne pas être toujours inclus dans un segment $[a, b]$, même si ce dernier contenait son centre x.

Ce n'est d'ailleurs la seule fois où prendre un peu de hauteur, au lieu de rendre complexes les concepts, donne au contraire de la souplesse dans les outils et, finalement, fait gagner en simplicité et donc en facilité de compréhension. Dans les années à venir, il faudra continuer à veiller à ce que le cursus d'apprentissage des futurs mathématiciens et scientifiques de haut niveau continue à leur fournir des techniques assez pointues pour qu'ils aient les meilleures armes en main pour devenir, comme leurs aînés, des spécialistes réputés dans un monde qui en a cruellement besoin : telle est, semble-t-il, la conclusion la plus naturelle qu'il convient de donner à cette brève description, sur un siècle, d'un système original aux résultats jusqu'à présent positifs pour le pays qui l'a conçu.

André WARUSFEL

Inspecteur général honoraire.